〈論　説〉

エコノミクス
第3巻第2号
1998年11月

「一般均衡理論と最適性」への関数解析の適用

筒井　修二

最近の理論経済学の研究においては，不確実要素の導入とモデルの動学化がますます重要になっている。これは，理論経済学において一分野を形成したゲームの理論の展開についても，あてはまるであろう。動学的分析は，一般的に，無限次元空間の分析を必要とする。このことは連続分析の場合，経済変数が実数空間上の関数となることから明らかであろう。また期間分析の場合であっても，経済の進行に最終期を考えることは不自然であり，世代交替モデルのように終期がない形でモデルが構成されている。貨幣論の議論を例にとっても，不換紙幣が正の価値を持つことは，有限期間の分析では説明できない。また不確実性の要素を経済に導入すると，無限次元空間の枠組の必要性が増加する。経済の起こり得る状態（states of the world）が有限である場合でも，その状態が連続的に変化するという無限次元空間を考えた方が適切である。

無限次元空間の解析を取り扱う数学的分野としては，関数解析といわれる領域がある。その中でもRiesz空間や位相ベクトル空間そして双対システムなどの解析を積極的に利用した議論が，最近の数理経済学において活発になっている。一般的均衡理論や最適性の問題を関数解析の手法を用いて再構築したものとしては，1990年代にAliprantis, Brown, Burkinshaw〔1〕,〔3〕の解説書があり，そのために必要な数学的な内容の解説書としてはAliprantis, Border〔2〕がある。この分野の研究には現代数学の知識が相当に必要であり，これまでの経済数学の領域をかなり越えたものになっている。そのためこれらの研究が日本において紹介されることは，筆者の知るかぎり少ない。そこでこの論文では，この新しい数理経済学の議論を簡単に展望して紹介する。

この論文の構成は，第1章において，商品空間の次元が有限である従来の一般均衡論と最適性の議論を簡単に整理する。第2章においては，無限次元空間の分析に用いられる関数解析の手法をまとめて述べる。第3章では，前の章の議論を踏まえて，無限次元空間における経済分析を説明する。

第1章

交換経済 ε は，抽象的には，消費者の集合 A から商品の集合 R^ℓ_+ と選好の集合 $\mathcal{P}$ との直積への関数 $\varepsilon: A \to R^\ell_+ \times \mathcal{P}$ として定義される。消費者はm人の経済主体から成り，$A = \{1, 2, \cdots\cdots m\}$である。$\mathcal{P}$ は R^ℓ_+ の上の各人の選好関係$\geq$の集合である。R^ℓ_+ は ℓ 次元のユークリッド空間で非負の要素の集合であり，商品の数は$\{1, 2\cdots\cdots\ell\}$の有限である。個人 i の経済的特徴は，$\varepsilon(i) = (\omega_i, \geq_i)$，$i \in A$ で示される。ここで ω_i は初期保有量を表わし，$\omega = \sum_{i=1}^{m} \omega_i$ は社会の初期賦与量を示す。また $P \in R^\ell_+$ を価格ベクトルとすると，内積 $P \cdot \omega_i$ は個人 i の所得水準である。

定義1．1

新古典派交換経済とは，交換経済εであって

(1) A に含まれる経済主体の数が有限である。

(2) 各個人に関して，$\omega_i > 0$ (1)であり，$\geq_i$は新古典派的である。

(3) 社会の賦与量は $\omega \gg 0$ である。

(1) ベクトルの大小関係について，$x \geq 0$ は x が非負のベクトルであることを示し，$x > 0$ は $x \geq 0$ かつ $x \neq 0$ であることである。また $x \gg 0$ は，xのすべての要素が正であることを示す記法である。

を満すものである。

ここで選好関係が新古典派的であるとは，$\succeq$が連続であり，また厳密に単調で，厳密に凸であるを意味している。より詳しく言うと，$\succeq$が連続であるとは，$\{y \in X : y \succeq x\}$ と $\{z \in X : x \succeq z\}$ が任意の $x \in X$ について閉集合になることである。なおここで $X = R^{\ell}_{+}$である。次に$\succeq$が厳密に単調であるとは，x，$y \in R^{\ell}_{+}$ で $x > y$ のとき $x \succ y$[(2)]になることである。また厳密に凸であるとは，$y \succeq x$，$z \succeq x$ で $y \neq z$ ならば $0 < \alpha < 1$ の任意の α に対して $\alpha y + (1-\alpha)z \succ x$ となることである。

新古典派的な選好関係の下では，価格ベクトル P の関数として連続である各個人の需要関数 $x_i(P)$ を導くことができる[(3)]。この経済の超過需要関数 $\zeta(P)$ は，$\zeta(P) = \sum_{i \in A} x_i(P) - \omega$ と定義される。この経済の均衡価格は，$\zeta(P) = 0$ を満たす $P \gg 0$ のベクトルである。新古典派経済が均衡価格を持つことは，Arrow-Debreu の定理として知られている[(4)]。

さて次に交換経済における配分の最適性について簡単に振り返ってみよう。m人の経済主体の間での配分（allocation）の集合$\mathcal{A}$は，$\mathcal{A} = \{x_1, \cdots x_m) \in (R^{\ell}_{+})^m : \sum_{i=1}^{m} x_i = \omega\}$ を満たす $(x_1, \cdots x_m)$ の集合である。この配分は，任意の $i \in A$ について $x_i \succeq_i \omega_i$ であるとき個人的に合理的 (Individually Rational) と言われる。次にこの配分が弱くパレート最適（Wealkly Pareto Optimal）と言われるのは，$y_i \succ x_i$，$(\forall i$[(5)]$\in A)$ となるような配分 $(y_1, \cdots y_m)$ が存在しない場合である。また配分がパレート最適と呼ばれるのは，$y_i \succeq_i x_i$，$(\forall i \in A)$ であり，かつ少なくとも１人の個人に対して $y_i \succ_i x_i$ となる配分 $(y_1, \cdots y_m)$ が存在しない時である。なお個人的に合理的な配分の集合 $\mathcal{A}_r$ は，$\mathcal{A}_r = (x_1, \cdots x_m) \in \mathcal{A} : x_i \succeq_i \omega_i, (\forall i \in A)\}$ となる。

個人的に合理的でかつパレート最適な配分が存在する条件は，各個人の選

(2) $x > y$ なる選好関係は，$x \succeq y$ かつ $y \succeq x$ でないことを意味している。
(3) 文献〔１〕の P.24の定理１．３．８に証明がある。
(4) 文献〔１〕の P.32の定理１．４．８と P.34の定理１．４．９に証明がある。
(5) $\forall i$ とは任意の i についてという意味である。

好が連続であることが次の定理で証明される。

定理１．２

有限の経済主体を持つ交換経済において，各個人の選好関係が連続であるならば，個人的に合理的でパレート最適である配分が存在する。

この定理は数学の chain の概念と Zorn の補題を使うと簡潔に証明することができる。まずある集合が chain であるとは，その集合の異なる要素が常に順序付けられることをいう。すなわち x，$y \in X$ ならば $x \geq y$ または $y \geq x$ が成立する。次に Zorn の補題とは，部分的に順序付けられた(6)(partially ordered) 集合の任意の chain が上から有界であれば，この集合は順序に関して最大の要素を持つというものである。

さて以上の準備の下にこの定理を証明する。まず $\mathcal{A}_r$ に含まれる要素 $x=(x_1, \cdots x_m)$ と $y=(y_1, \cdots y_m)$ に対して $x_i \geq_i y_i$，$(\forall i \in \mathrm{A})$ が成立するときに $x \geq y$ と順序付ければ，$\mathcal{A}_r$ は部分的に順序付けられた集合になる。いま A_r における任意の chain を C とすると，C は上に有界であることがわかる。すなわちある $x \in A_r$ があって，任意の $c \in C$ に対して $x \geq c$ となることを示せる。まずある $c_0 \in C$ が存在して $c_0 \geq c$, $(\forall c \in C)$ となるときは，明らかにその事が成立する。次にそれぞれの $c \in C$ に対して $x \geq c$ となる c に対応する要素 $x \in C$ が存在する場合を考えよう。C は順序付けられる集合であるから，C の要素 x_α を取り出して $\{x_\alpha\}$ というネット(7) (net) を考えることができる。$\mathcal{A}_r$ はその定義によりコンパクト集合になるから，このネット $\{x_\alpha\}$ はある集積点 $x \in \mathcal{A}_r$ を持つ。この x に関して，任意の $c \in C$ に対して $x \geq c$ が成立する。したがって Zorn の補題により，$\mathcal{A}_r$ において $\geq$ に関する最大の要素が存在する。この最大の要素が $\mathcal{A}_r$ において個人的に合理的でパレート最適

(6) 部分的な順序 (partial order) とは，選好関係 $\geq$ で通常仮定されている反射的 (reflexive) で推移的 (transitive) で反対象的 (antisymmetric) な順序を言う。すなわち $x \geq x$ であり，$x \geq y$，$y \geq z$ ならば $x \geq z$ となり，$x \geq y$，$y \geq x$ ならば $x \sim y$ となる順序である。ここで $x \sim y$ は x と y が無差別であることを示す。

(7) net とは点列概念を一般化したもので，順序付けられた要素の列 $\{x_\alpha\}$ の添字 α の集合を自然数に限らないものである。

な配分になっている。

次にパレート最適の概念を強めたものとして，コア（core）について述べる。まず，ある結託（coalition）の集合S⊆Aが配分（x_1，…x_m）を改善するとは，ある配分（y_1，…y_m）が存在して $\sum_{i\in S} y_i = \sum_{i\in S} \omega_i$ と $y_i >_i x_i$，$(\forall i \in S)$ が成立する場合を言う。結託を構成する人々の効用を改善するような配分が存在しないとき，元の配分はコアの中にあると言われる。新古典派交換経済が空でないコアを持つことは，移転可能な効用を持たない n人協人ゲームが空でないコアを持つことを証明することにより，Scarf によって示された。ここで n人ゲームVとは，抽象的には，すべての結託の集合 $\mathcal{N}$ から R^n のすべての部分集合の族 2^{R^n} への対応(correspondence)[8]として，$V : \mathcal{N} \to 2^{R^n}$ と定義される。n人ゲームのプレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \cdots n\}$ とすると，$\mathcal{N} = \{S \subseteq N : S \neq \phi\}$ である。また $2^{R^n} = \{X \subseteq R^n : X \neq \phi\}$ であり，R^n の power set と呼ばれる。具体的な解釈として，$V(S)$は，結託 S により達成可能になる利得ベクトルの集合を表している。n人ゲームのコア Core(V)は，Core(V)$=\{x \in V(N) : y \in V(S)$で $y_i > x_i$，$(\forall i \in S)$となるような $S \in \mathcal{N}$ が存在しない$\}$と定義される。n人ゲームは balanced[9]と言われるとき，ある条件の下で空でないコアを持つことが証明されている[10]。

この n人ゲームが空でないコアを持つという結果を用いると，交換経済が空でないコアを持つという次の定理が得られる。

定理1．3[11]

消費者の選好が連続な準凹の効用関数で表現されるとき，その交換経済は空でないコンパクトなコアを持つ。

ここで効用関数が $u : R^\ell_+ \to R$ が準凹(qusi-concave)であるとは，x，$y \in R^\ell_+$，$x \neq y$，$0 < \alpha < 1$ に対して $u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \mathrm{Min}\{u(x), u(y)\}$ が成立することを言う。

---

(8) 対応とは点対集合写像を意味する。
(9) balanced という概念については〔1〕の P.44の定義1，5．7に説明がある。
(10) このことは〔1〕の P.44の定理1．5．9で証明されている。
(11) この定理の証明は〔1〕の P.48の定理1．5．10を見られたし。

さて交換経済の均衡価格 P によってもたらされる配分，すなわち $x_i(P)$ を需要関数として $(x_1(P),\ \cdots x_m(P))$ はワルラス（競争）均衡と呼ばれる。このワルラス均衡とパレート最適の配分の関係として，厚生経済学の第一定理と第二定理がよく知られている。すなわち，ワルラス均衡の配分はパレート最適であるというのが第一定理であり，任意のパレート最適な配分は所得の分配を通じてワルラス均衡として実現されるというのが第二定理である。パレート最適を強めた概念としてのコアとワルラス均衡の関係として，コア同値定理と呼ばれる命題がある。これは，どのワルラス均衡の配分もコアの中にあり，極限においてコアの配分のみがワルラス均衡になるというものである。以上のような均衡と最適性の関係の内容を明示するために，次に必要な概念を整理しておこう。

定義１．４

(1) 配分 $(x_1,\ \cdots x_m)$ がワルラス均衡であるとは，ある価格ベクトル $P\neq 0$ が存在して予算集合 $\beta_i(P)=\{x\in R^{\ell}_{+}：P\cdot x\leq P\cdot\omega_i\}$ に属する x_i について，$x>_i x_i$ となれば $P\cdot x>P\cdot\omega_i$ となることである。

(2) 配分 $(x_1,\ \cdots x_m)$ が準均衡（Qusiequilibrium）とは，ある $P\neq 0$ が存在して，$x\geq_i x_i$ ならば $P\cdot x\geq P\cdot\omega_i$ となることである。

ここで，配分 $(x_1,\ \cdots x_m)$ が $x\geq_i x_i$ ならば $P\cdot x\geq P\cdot x_i$ となるような $P\neq 0$ を持つとき，この配分は P により支えられる (supported) と言われる。準均衡の定義において，$x_i\in\beta_i(P)$ であるから $x\geq_i x_i$ ならば $P\cdot x\geq P\cdot\omega_i\geq P\cdot x_i$ となり，この配分は P により支えられている。

コア同値定理に関して，経済主体の交換経済に及ぼす影響を極小化する方法として，Debreu-Scarf により考案された。複製経済（replica economy）の概念がある。これは ε を m 人の経済主体を持つ交換経済とするとき，任意の整数 r に対して r 重（r-fold）の複製経済 ε_r を下のように定義する。

定義１．５

ε_r は rm 人の経済主体を持った交換経済であり，$(i,\ j)$, $i=1\cdots m$, $j=1\cdots r$ の添字で経済主体を区別する。ここで任意の j について，$\geq_{ij}$ はすべて $\geq_i$ に等しく，ω_{ji} は ω_i に一致する。またこの経済の総賦与量は $r\omega=\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{m}\omega_{ji}$

になる。

すなわち $\mathcal{E}_r$ は，m の異なる特性（$\geq_i$，ω_i）を持った消費者がそれぞれ r 人いる経済である。$\mathcal{E}_r$ における配分$(x_{11}\cdots x_{1r},\ x_{21}\cdots x_{2r},\ \cdots x_{m1}\cdots x_{mr})$は $x_{ji}=x_i$，$(j=1\cdots r,\ i=1\cdots m)$が成立するとき同じ待遇の配分(equal treatment allocation)と言われる。このように構成される r 重の複製経済のコアの存在を考えるとき，次の定義がある。

定義1．6

交換経済 $\mathcal{E}$ における配分が Edgeworth 均衡と言われるのは，その配分が，すべての r に関して，同じ待遇の配分という意味で $\mathcal{E}_r$ のコアに属する場合である。

この Edgeworth 均衡の存在に関して，次の定理がある。

定理1．7

交換経済 ε において選好が連続な準凹の厳密に単調な効用関数で表わされるとき，すべての $\mathcal{E}_r$ のコアに属する $\mathcal{E}$ の配分が存在する。

この定理の証明の概略を述べよう。まず $\mathcal{E}$ における配分 $(x_1\cdots x_m)$ は，同じ待遇の配分を考えると，$\mathcal{E}_r$ の配分とみなすことができる。いま同じ待遇の配分という意味で $\mathcal{E}_n$ のコアに属する $\mathcal{E}$ の配分の集合 C_n すなわち$C_n=\{(x_1\cdots x_m)\in A:(x_1\cdots x_m)\in \mathrm{Core}(\mathcal{E}_n)\}$ を考える。定理1，3の条件が仮定されていることより，$\mathrm{Core}(\mathcal{E}_n)$は空集合ではない。また $\mathrm{Core}(\mathcal{E}_n)$に属する配分は同じく待遇の配分になることが示せて，C_n は空ではない。また定理1．3より C_n はコンパクトな集合になる。$n+1$ 重の複製経済で $\mathcal{E}$ の配分が改善できなければ，なおさら n 重の複製経済では無理であるから，$C_{n+1}\subseteq C_n$ が成立する。この C_n の系列の $\cap_{n=1}^{\infty}C_n$ は C_n のコンパクト性より空集合ではなく，これがエッジワース均衡になっている。

エッジワース均衡とワルラス均衡の関係については，これもコア同値性と呼ばれる次の定理がある。

定理1．8 [12]

交換経済の選好が連続な凸[13]で厳密に単調であるとき，配分がワルラス均衡であることとエッジワース均衡であることは同値である。

定理1．7と定理1．8を用いると，$Arrow$ - Debreuのように需要関数を用いることなく，ワルラス均衡の存在が示せる。すなわち

系1．9

選好が連続な準凹の厳密に単調な効用関数で表わされるとき，この交換経済にワルラス均衡が存在する。

第2章

2．1 Riesz空間

この章では，無限次元空間における様々の数学的概念や解析について，簡単に整理しておこう。まずRiesz空間とは，部分的に順序付けられたベクトル空間であり，かつ束（lattice）であるものである。ここで集合Eが束であるとは，$\forall x, y \in E$に対して，その上限と下限がEの中に存在することを言う。この上限と下限は，それぞれ$x \vee y = \sup\{x, y\}$，$x \wedge y = \inf\{x, y\}$という記法で表わされる。この記法を用いて，$x \in E$の正の部分（positive part）$x^+$，$x$の負の部分（negative part）$x^-$そして$x$の絶対値（absolute value）$|x|$はそれぞれ$x^+ = x \vee 0$，$x^- = (-x) \vee 0$，$|x| = x \vee (-x)$と定義される。また$E$において$x \geq 0$を満たすベクトルは，正のベクトルと呼ばれ，その集合は$E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$と記される。Riese空間$E$の部分集合$A$がsolidと言われるのは，$|y| \leq |x|$であり$x \in A$のときに$y \in A$となる場合である。ベクトル空間がsolidであるときイデアル（ideal）と呼ばれ，イデアルはRiesz空間である。Riesz空間の例としては様々の関数空間がある。ここで関数空間E（function space）とは，空でない集合Ωの上で定義された実数値関数$f : \Omega \rightarrow R$から成るベクトル空間で，$\forall f, g \in E$に対してその上限と下限は$(f$

(12) 〔1〕のP.64の定理1．6．16に証明がある。

(13) 選好が凸であることと効用関数が準凹であることは同じである。

$\vee g)(x)=\max\{f(x), g(x)\}$, $(f\wedge g)(x)=\min\{f(x), g(x)\}$, $(\forall x\in\Omega)$ として定義される。Riesz 空間において $[x, y]=\{z\in E : x\leq z\leq y\}$ と定義される集合は，E の順序区間（order interval）と呼ばれる。このような $[x, y]$ に含まれる集合は，E において順序有界（order bounded）と言われる。E の上の正の線形汎関数[1]（positive linear functional）$\phi : E\to R$ とは，任意の $x\geq 0$ に対して $\phi(x)\geq 0$ が成立するような線形関数である。この線形汎関数が順序有界と言われるのは，E の順序区間を R の順序有界な集合の上に写す場合である。このような E の上の順序有界な線形汎関数の全体はベクトル空間になり，E の順序対（order dual）と呼ばれ，$E^{\sim}$ という記法でそれを表わす。$E^{\sim}$ の要素 ϕ, ψ を，$\phi(x)\geq\psi(x)$, $(\forall x\in E^{+})$ となるときに $\phi\geq\psi$ と順序付ければ，$E^{\sim}$ は Riesz 空間になる。また $E^{\sim}$ が E の点を分離するとは，任意の $x\neq 0$ に対して $E^{\sim}$ に属するある ϕ が存在して $\phi(x)\neq 0$ となる場合を言う。

2．2　位相的 Riesz 空間

Riesz 空間はベクトル空間と束空間の性質をもっていることから，ベクトル空間の代数的操作と束空間の束としての操作が連続になるような位相を導入すれば，様々な解析が可能になる。ここで位相（topology）とは，開集合の族で，それにより写像の連続性が判定できるようなものを言う。具体的には，X という集合に τ という位相[2]を考え，Y という集合に σ という位相を考える。それぞれの位相空間は (X, τ)，(Y, σ) のように表わす。X から Y への写像が $x\in X$ で連続であるとは，$\phi(x)$ を含むような Y における任意の近傍[3] V に対して，X における x のある近傍Wが存在して $\phi(\mathrm{W})\subset V$ となることである。

ベクトル空間 E における代数的操作，たとえば x, $y\in E$, $\alpha\in R$ のとき，$(x, y)\to x+y$ や $(\alpha, x)\to\alpha x$ などの操作を連続にするような E の上の位相は，線形位相（linear topology）と言われる。この線形位相 τ とベクトル空

(1)　汎関数とは，ベクトル空間から実数空間への線形関数を言う。
(2)　この τ はXの部分集合（開集合）の族で位相の公準を満たすものである。
(3)　近傍とは開集合を含む集合のことを言う。

間 E の組 (E,τ) は，位相線形空間（topological vector space）と呼ばれる。Riesz 空間 E の上の線形位相 τ が solid な集合からなる 0 の近傍系(4)を持つとき，この位相空間 (E,τ) は局所的に solid な Riese 空間と言われる。Riesz 空間における束としての操作（lattice operation）たとえば $(x,y)\to x\vee y$，$x\to|x|$ などの操作を連続にする位相が，局所的に solid な Riesz 空間の位相である(5)。なおこの連続性は，正確には一様連続性であり次のように定義される。写像 $\varphi: X\to Y$ が一様に連続であるとは，Y における 0 を含む任意の近傍 V に対して X における 0 を含むある近傍 W が存在して，$x,y\in X$，$x-y\in W$ であれば $f(x)-f(y)\in V$ となることを言う。なお局所的に solid な位相 τ の中で，さらにその近傍系が局所的に凸である場合に，(E,τ) は局所的に凸で solid な（locally convex-solid）Riesz 空間と呼ばれる。

位相線形空間 (E,τ) の位相双対（topological dual）とは，E から連続な線形汎関数の全体からなるベクトル空間であり，それは $(E,\tau)'$ と表わされる。

2．3　双対システム

ベクトル空間の対 X と X' が双対システム（dual system）と呼ばれるのは，X と X' の直積から R への双線形関数（bilinear function）すなわち $(x,x')\to\langle x,x'\rangle\in R$ があって，X と X' が互いに相手の点を分離する場合を言う。ここで $x\in X$，$x'\in X'$ であり，$\langle x,x'\rangle$ は双線形関数 $\langle\cdot,\cdot\rangle: X\times X'\to R$ の (x,x') における値を示している。なお双線形関数とは，X と X' の要素に関してそれぞれ線形であることを意味する。このような条件を満たす双対システムは $\langle X,X'\rangle$ という記法で表わされる。

X の上の局所的に凸の位相 τ が $\langle X,X'\rangle$ と整合的（consistent）であるというのは，$(X,\tau)'=X'$ となる場合である。すなわち任意の $f\in(X,\tau)'$ に対して，ある $x'\in X'$ が存在して，$f(x)=\langle x,x'\rangle$，$(\forall x\in X)$ が成立することである。このような双対システムと整合的になる位相の中で最も弱い位相と最も強い位相が考えられ，それらは弱い位相（weak topology）と Mackey

(4) 近傍系は近傍の族であり，位相の公準を満たすものである。

(5) 文献〔2〕の P.231の定理6.40にその証明がある。

位相と呼ばれる。ここで位相が強いとか弱いということの意味は，σ，τ を X の上の位相とするとき包含関係の意味で $\sigma \subset \tau$ のとき，σ は τ よりも弱いあるいは τ は σ より強いというのである。たとえば (X, τ) から (X, σ) への恒等写像 $i: X \to X$ を考えると，τ が σ より強いときに i は連続になることがわかる。というのは σ に含まれる任意の開集合 V に対して，その逆像 $i^{-1}(V) = V$ が τ に含まれているからである。$\langle X, X' \rangle$ と整合的な弱い位相と Mackey 位相は，それぞれ $\sigma(X, X')$ と $\tau(X, X')$ という記法で表わされる。具体的に $\sigma(X, X')$ は，任意の正の実数 ε に対して $\{x \in X : |\langle x, x' \rangle| < \epsilon, (\forall x' \in X')\}$ なる形の集合を 0 の近傍系とする X の上の位相である。$\{X_\alpha\}$ を X の上の net とするとき，この net が弱い位相の意味で $x \in X$ に収束することを，$x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X, X')} x$ という記法で表わす。弱位相の作り方から，$\langle x_\alpha, x' \rangle \to \langle x, x' \rangle$，$(\forall x' \in X')$ のとき $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X, X')} x$ となる。なお $\sigma(X, X')$ をより簡単にして w で表わすこともある。同様にして弱位相 $\sigma(X', X)$ は w^* で表わされる。

次に Mackey 位相 $\tau(X, X')$ とは，X の上の局所的に凸の位相であり，X' の弱位相 w^* の意味でコンパクトな凸の balanced[(6)] 集合 A の上で一様収束性を保証するものである。より具体的に $\tau(X, X')$ は，任意の正の実数 ε に対して $\{x \in X : |\langle x, x' \rangle| < \epsilon, (\forall x' \in A)$，$A$ は X' における w^*—[(7)] コンパクトな凸の balanced 集合$\}$ の形の集合を 0 の近傍系とする X の上の位相である。X における net$\{x_\alpha\}$ が Mackey 位相の意味で $x \in X$ に収束すること，すなわち $x_\alpha \xrightarrow{\tau(X, X')} x$ とは $\sup\{|\langle x_\alpha - x, x' \rangle| : x' \in A$，$A$ は X' における w^*—コンパクトな凸の balanced 集合$\} \to 0$ となることである。

ベクトル空間における双対システムの概念を Riesz 空間に拡張すると，Riesz 双対システムになる。すなわち $\langle E, E' \rangle$ が Riesz が双対システムであるとは，E が Riesz 空間であり，E の点を分離する E' が順序双対 $E^\sim$ のイデアルになっており，双対関数 $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E' \to R$ が $\langle x, x' \rangle = x'(x)$ を満た

(6) balanced な集合A は circled とも言われ，$\forall |\alpha| \leq 1$ に対して $\alpha x \in A$ となる集合である。
(7) w^*—コンパクトとは w^* の位相を基準にしてコンパクトであるという意味である。

すことを言う。Riesz 空間 E の上の位相が局所的に凸で solid であるとき，$\langle E, E'\rangle$ は Riesz 双対システムになる。Riesz 双対システム $\langle E, E'\rangle$ に整合的な局所的に凸で solid な位相の中でも最も弱い位相と最も強位相を考えることができて，それぞれ $|\sigma|(E, E')$ と $|\tau|(E, E')$ という記法で表わされる。これらはそれぞれ絶対的弱位相，絶対的 Mackey 位相と呼ばれる。なお $|\sigma|(E, E')$ と $|\sigma|(E', E)$ の代わりに $|w|$ と $|w^*|$ と書くこともある。

2．4　順序連続

実数空間において上に有界な集合は実数空間の中に上限を持つという性質を Dedekind の完備性と言う。同様に Riesz 空間において，順序の意味で上に有界な集合が上限を持つとき，この Rieiz 空間は Dedekind 完備であると言われる。Riesz 空間は部分的に順序付けられた集合であるから，位相を導入して連続性を判定するのとは別に，順序収束 (order convergence) を考えることができる。あるネット $\{x_\alpha\}$ が x に順序収束することは $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ という記法で表わされる。この意味は，$\{x_\alpha\}$ と同じ添字の集合をもった別のネット $\{y_\alpha\}$ があって，$|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ が各 α について成り立ちかつ $y_\alpha \downarrow 0$ となることをいう。ここで $y_\alpha \downarrow 0$ の意味は，$\alpha \geq \beta$ のとき $y_\alpha \leq y_\beta$ であり，$\{y_\alpha\}$ の下限が 0 であることである。Riesz 空間の間の関数 $f：E \to F$ が順序連続(order continuous)であるとは，$x_\alpha \xrightarrow{0} x$ のとき $f(x_\alpha) \xrightarrow{0} f(x)$ となる場合である。また Riesz 空間の上の線形位相 τ が順序連続であるとは，$x_\alpha \xrightarrow{0} 0$ のとき $x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ となる場合，すなわち $\{x^\alpha\}$ が順序の意味で 0 に収束すれば位相の意味でも 0 に収束することを言う。

第 3 章

第 1 章において商品空間の次元を有限として，R^l_+ を消費者の選択範囲とした交換経済を考えた。この章では，商品空間の次元を無限次元としてモデルを構成する。このような商品空間の例としては，たとえば $C[0, 1]$ がある。ここで $C[0, 1]$ は定義域を $[0, 1] \subset R$ とする連続な実数値関数の全体であり，関数空間として Riesz 空間になる。具体的に $f \in C[0, 1]$ の関数は，期間 $[0, 1]$ の間で連続的に消費を選択する行動と解釈できる。集合 $\{f$

(x) : $x \in [0,1]\}$ は, $[0,1] \subset R$ が非可算集合であることから, 無限次元の商品空間の点である。

この章では, 無限次元空間における商品空間と価格空間の組を, Riesz 双対システム $\langle E, E' \rangle$ として考察する。ここで E は商品空間を表わし, 経済主体の消費集合は E^+ である。また E' は価格空間であり, $x \in E$ の $P \in E'$ における双対関数の値である $\langle x, P \rangle$ は x を価格ベクトル P で評価した値を示している。有限次元空間の内積と同じように, この値を $P \cdot x$ と書く。各経済主体の初期保有量 $\omega_i \in E$, $i \in A$ は $\omega_i > 0$ とする。消費者の選好は, 単調で準凹の効用関数 $u_i : E^+ \to R$ で表わされるとする。双対システム $\langle E, E' \rangle$ と整合的である位相 τ が局所的に solid であるとしよう。この位相 τ に関して効用関数は連続であると仮定される。以上のような性質を満たす Riesz 双対システムと経済主体の特性の組を, この章での交換経済 ε と定義する。すなわち $\varepsilon = (\langle E, E' \rangle, \{\omega_i, u_i), i = 1 \cdots m\})$ である。このような交換経済の枠組の下で, 第1章で述べたワルラス均衡や最適に関する議論が無限次元空間においても同様に成立するのである。

ここで注意すべき点は, 無限次空間におけるコンパク性の性質が必ずしも成立しないということである。有限次元ベクトル空間は, ユークリッド位相(1)という唯一の Hausdorff(2)線形位相しか持たないことが知られている(3)。したがって $[0, \omega]$ という商品空間の順序区間を考えると, 有界閉集合であることからコンパクトになる。この $[0, \omega]$ という集合は Edgeworth box とも言われ, 交換経済の取引はこの集合の中でなされる。一方, 無限次元空間で $[0, \omega]$ の集合を考えると, 次のような場合がある。いま $\langle L_\infty[0,1], L_\infty'[0,1] \rangle$ という Riesz 双対システムを考えよう。ここで $L_\infty[0,1]$ は $[0,1]$ から R への関数 f であって, $\sup\{f(x) : x \in [0,1]\}$ が有限である

(1) R^n の上のユークリッド位相は, $x \in R^n$ に対して $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$ というノルムから生成される。

(2) Hausdorff な位相とは, x, $y \in X$, $x \neq y$ に対して x と y の近傍 U, V があって $U \cap V = \phi$ とすることができるものである。

(3) この証明は, [2] の P.149の定理 4.61を参照。

ようなものの集合である。社会の総賦与量 ω が $\omega\in L_\infty$〔0，1〕であるということの意味は，ω：〔0，1〕$\to R$ の関数であって，$\omega(x)=\omega$, ($\forall x\in$〔0，1〕) ということである。すなわち ω は〔0，1〕の上の定数値関数であって，$\omega\chi_{[0,1]}$ と書くこともできる。ここでは χ_A は特性関数と言われ，集合 A の上で1の値をとる関数である。さて $0<\omega\in L_\infty$〔0，1〕の順序区間〔0，ω〕は弱い位相の下でコンパクトにならないことがわかる。というのは，正の測度(4)を持った可測集合(5)$A\subset$〔0，1〕と $\omega\geq\varepsilon\chi_A$ となるような $\varepsilon>0$ を考えてみよう。また A の部分集合で互いに交わらない正の測度をもった可測集合の列 $\{A_n\}$ をとろう。明らかに $\{A_n\}$ 要素の測度は0に収束していく。ここで $f_n=\varepsilon\chi_{A_n}\in$〔0，$\omega$〕とおいて，$\{f_n\}$ を〔0，ω〕におけるネットとしよう。L_∞〔0，1〕に属する要素 f のノルム(6)を $\|f\|_\infty=\sup\{f(x)$：$x\in$〔0，1〕$\}$ と定めると，f_n のノルムは $\|f_n\|_\infty=\varepsilon$ となる。したがって $\{f_n\}$ は $0\in L_\infty$〔0，1〕に収束することはなく，〔0，ω〕のネット $\{f_n\}$ が収束する部分ネットを持たないことから，〔0，ω〕は弱コンパクト（wealky compact）ではない。

交換経済においてエッジワースの箱〔0，ω〕が商品空間 E において弱コンパクトであれば，有限次元空間と同様に，この経済にコアの配分が存在して E^m の弱コンパクト集合になることが言える(7)。この定理の証明には，〔0，ω〕の配分のネットが〔0，ω〕のある要素に収束することが用いられている。この定理を用いると，〔0，ω〕が弱コンパクトであるときに，純粋交換経済(8)がエッジワース均衡を持つことを，第1章の定理1．7と同様にして証明することができる(9)。この定理の証明には，〔0，ω〕が弱コンパクトのとき配分の集合 $\mathcal{A}$ が弱コンパクトになることを用いる。

---

(4) 測度（measure）とは，集合関数（set function）の1種である。
(5) 可測集合（measurable set）とは，ある測度でその大きさが測れるような集合である。
(6) ノルムとはユークリッドノルムと同様の性質をもつ関数である。
(7) 〔1〕のP.127の定理3．3．6に証明がある。
(8) 純粋交換経済とは，交換経済において選好が厳密に単調な場合である。
(9) 〔3〕のP.127の問題3．3．3の(3)にその証明がある。

さて以下では，具体的な例を用いて，無限次元空間におけるワルラス均衡やエッジワース均衡の存在を確認することにしよう(10)。

例３．１

交換経済の Riesz 双対システムが$\langle L_P[0,1], C[0,1]\rangle$である場合を考える。ここで$1\leq p<\infty$であり，$L_P[0,1]$は$f:[0,1]\to R$の関数の集合で$\{f: |\int_0^1 |f(x)|^p dx|^{\frac{1}{p}}<\infty\}$の条件を満たすものである。また$C[0,1]$は$[0,1]$から実数空間への連続関数の集合であり，双対関数の$P\in C[0,1]$，$x\in L_P[0,1]$における値は$P\cdot x=\langle P,x\rangle=\int_0^1 p(t)x(t)dt$である。

この経済には二人の消費者がおり，初期消費量と効用関数はそれぞれ$\omega_1=\omega_2=\frac{1}{2}\chi_{[0,1]}$と$u_1(x)=\int_0^1 tx(t)dt$，$u_2(x)=\int_0^1(1-t)x(t)dt$とする。このとき社会の賦与量は$\omega=\omega_1+\omega_2=\chi_{[0,1]}$である。いま配分$(x_1,x_2)=\chi_{[\frac{1}{2},1]}$，$\chi_{[0,\frac{1}{2}]}$を考えよう。この配分は個人１が後期$[\frac{1}{2},\ 1]$に社会の配分をすべて消費し，個人２が前期$[0,\frac{1}{2}]$に社会の配分をすべて消費する形になっている。ここで価格ベクトル$P:[0,1]\to R$を$P(t)=\max\{t,1-t\}$とおくと，このとき配分(x_1,x_2)はワルラス均衡になっている。というのは，$x>_i x_i(u_i(x)>u_i(x_i))$のとき$P\cdot x>P\cdot\omega_i$になることがわかるからである。上の例で具体的に計算してみると，$P\cdot x=\int_0^1 p(t)x(t)dt=\int_0^1\max\{t,1-t\}\ x(t)dt\geq\int_0^1 tx(t)dt=u_1(x)$であり，$u_1(x_1)=\int_0^1 tx_1(t)dt=\int_0^1 t\chi_{[\frac{1}{2},1]}dt=\int_{\frac{1}{2}}^1 tdt=\frac{3}{8}$，そして$p\cdot\omega_1=\int_0^1\max\{t,1-t\}\ \frac{1}{2}\chi_{[0,1]}dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}(1-t)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{1}{2}tdt=\frac{3}{8}$となる。したがって，$u_1(x)>u_1(x_1)$ならば$P\cdot x>P\cdot\omega_1$となる。同様にして$x>x_2$ならば$P\cdot x>P\cdot\omega_2$が言えるので，配分$(\chi_{[0,\frac{1}{2}]},\ \chi_{[\frac{1}{2},1]})$はワルラス均衡になっている。次にこの配分がエッジワース均衡にもなっていることを示そう。

---

(10) 以下の例は Jones に基付くもので〔３〕の P.135の問題３．４．６を参照されたし。

いま (x_1, x_2) が r 重の複製経済のコアの中に属さないとすると，ある結託 S と配分 $(y_{11}\cdots y_{1r},\ y_{21}\cdots y_{2r})$ が存在して，$y_{ij} >_{ij} x_{ij} = x_i$, $(\forall(i,j)\in S)$ と $\sum_{(i,j)\in S} y_{ij} = \sum_{(i,j)\in S} \omega_{ij}$ が成立する。ここで (x_1, x_2) がワルラス均衡であることから $P\cdot y_{ij} > P\cdot\omega_{ij}$, $(\forall(i,j)\in S)$ が成立するから $P\cdot\left(\sum_{(i,j)\in S} y_{ij}\right) = \sum_{(i,j)\in S} p\cdot y_{ij} > \sum_{(i,j)\in S} p\cdot\omega_{ij} = P\cdot\left(\sum_{(i,j)\in S}\omega_{ij}\right)$ となり矛盾が生じる。故に (x_1, x_2) はどの ε_r のコアにも属するからエッジワース均衡になっている。ところで $L_P[0, 1]$ の双対空間を $C[0, 1]$ から連続微分可能な関数からなる集合の $C^1[0, 1]$ に変えると，$P(t)$ は明らかにして $C^1[0, 1]$ に属さないから，上の結論は成立しない。

参考文献

〔1〕 C.D. Aliprantis, D.J. Brown, and O. Burkinshaw, Existence and Optimality of Competitive Equilibria, Springer-Verlag, 1990.

〔2〕 C.D. Aliprantis and K.C. Border, Infinite Dimensional Analysis: A Hitch-hikers Guide, Springer-verlag, Studies in Economic Theory, # 4, 1994.

〔3〕 C.D. Aliprantis and Charalambos, Problems in Equilibrium Theory, Springer-verlag, 1996.