『経営学論集』，第16巻　第３号，１-11，2006
KYUSHU SANGYO UNIVERSITY, *KEIEIGAKU RONSHU*（*BUSINESS REVIEW*）Vol. 16，NO. 3，１-11，2006

〔論　説〕

利得関数空間とナッシュ均衡対応のグラフのホモトピー同値性について

髙　尾　健　朗

要　旨

本稿は，ナッシュ均衡の幾何学的考察を行なったものである．主に，利得関数空間からナッシュ均衡対応のグラフへの同相写像とナッシュ均衡対応のグラフから利得関数空間への射影写像との合成が，利得関数空間上の恒等写像とホモトープであることの証明に当てた．また，そのことの意味についての解釈も行なっている．

目　次

１．はじめに

1970年代から1980年代にかけて，ナッシュ均衡の精緻化(refinements of Nash equilibrium）と呼ばれる議論が，理論経済学会において大流行し，夥しい数の論文が書かれた．その数は，主な学術雑誌に載せられたものだけでも数百に及び，すべてを把握することは不可能である．この議論は，拙稿(2005a）においても述べているように，合理的とは思えないナッシュ均衡点を排除し，より合理的なゲームの解を規定するための数学的基礎付けに関する議論である．中には現実離れしたような例も数多く出され，いくつもの解概念が提案された．これら一連の議論の中で一つの頂点に達したのが，Kohlberg and Mertens（1986）による戦略的安定均衡（strategically stable equilibrium ; SSE）の概念である．以後，いくらかの改善はなされたものの，SSE 以上の精緻化理論は提出されていない[1)]．

１）1990年代に入って，多くのゲーム理論家の関心が均衡理論の数学的厳密化よりも現実の人間行動の分析に

このSSEの基礎となる定理がKohlberg and Mertens（1986）のTHEOREM 1（以下，単にTHEOREM 1と呼ぶ）である．しかし，THEOREM 1そのものの意味は分かり難く，Kohlberg and Mertens（1986）による証明も，容易に理解できるようなものではない[2]．とりあえず，このTHEOREM 1がどのようなものか，そのまま載せておこう．

THEOREM 1：*$\bar{p}$ is homotopic to a homeomorphism. More precisely, there exists a homeomorphism ϕ from Γ to E such that $p \circ \phi$ is homotopic to the identity on Γ under a homotopy that extends to $\overline{\Gamma}$.*[3]

いくつかの記号が無定義のまま使われているので，若干の説明を加えておく．ただし，位相幾何学の基本概念である *homotopic*（ホモトープ），*homeomorphism*（同相写像），*homotopy*（ホモトピー），*projection mapping*（射影写像），*one-point compactification*（１点コンパクト化）については既知とする——これらの概念については，本稿で必要な限りにおいて，本文中もしくは脚注で簡単に説明している——．なお，*identity* は恒等写像である．Γ は，プレイヤーの数と各プレイヤーのもつ純戦略の個数が固定され，少なくとも１人のプレイヤーの利得関数だけが異なるすべてのゲームの集合である．これは利得関数空間と同一視される．利得関数はいくらでも大きい（あるいはいくらでも小さい）実数値を取り得るので，射影写像 p を導入するために，無限遠点（∞）を付け加えて Γ は１点コンパクト化され $\overline{\Gamma}$ と表わされている．E は，ゲーム $G \in \Gamma$ のナッシュ均衡集合を $\Delta^{NE}(G)$ と表わしたとき，Γ から Δ（混合戦略空間）への写像のグラフであり，$E = \{(G, \sigma) \in \Gamma \times \Delta \mid \sigma \in \Delta^{NE}(G)\}$ で定義されるものである．E も１点コンパクト化され，$\overline{E}$ と表わされる．p は，E から Γ への射影写像であるが，$\bar{p} : \overline{E} \to \overline{\Gamma}$ において，$\bar{p}(\infty) = \infty$ と定義されている．

写像 ϕ は，THEOREM 1の中ではゲームの集合（利得関数空間）Γ からナッシュ均衡対応のグラフ E への'ある同相写像'としか述べられていないが，これは，与えられたゲーム $G \in \Gamma$ から元のゲーム $G' \in \Gamma$ とそのナッシュ均衡点 $\sigma \in \Delta^{NE}(G')$ を逆算する写像である．拙稿（2005

移ったことによる．現実の人間に過度の合理性を仮定することの無意味さが認識され始めたと言ってもよいだろう．拙稿(2005a）の第５章「まとめ」でも述べているように，1990年代以降，非協力ゲーム理論研究の流行が均衡精緻化理論から進化ゲーム理論や社会ゲーム理論へと変わったことは，その現れである．社会ゲーム理論では，ナッシュ均衡さえ達成されないことも容認されることがある．好意的に解釈すれば，ゲーム理論が従来よりもかなり幅広い範囲まで応用可能なように拡張されつつあるとも言える．

２）Kohlberg and Mertens（1986）では，ナッシュ均衡の幾何学に興味のない読者は，初めて読む際には，定理の詳細とその証明を飛ばすように薦めている．そのためか，ゲーム理論の専門書でも，この定理から得られる結果のみが引用されているものばかりで，この定理そのものも載せられていない．

３）Kohlberg and Mertens（1986）の3.2節 *'The Structure of Nash Equilibria'* から引用．

b)では，この写像を具体的に構成している——拙稿(2005b)と本稿では，これを$\varphi: \Gamma \to \mathcal{G}(\Delta^{NE})$と表わしている——.

本稿は，THEOREM 1の証明を行ない，その意味を解釈したものである．以下，本稿の第２章以下の内容について簡単に述べる．第２章は，拙稿(2005b)で構成した同相写像$\varphi: \Gamma \to \mathcal{G}(\Delta^{NE})$について，要点のみを整理したものである．第３章では，ゲームのノルム（norm）とゲーム間の距離を定義し，それから得られる命題を証明している．第４章は，THEOREM 1の証明とまとめして，THEOREM 1がどのような意味をもっているのかについて簡単に述べた．THEOREM 1の証明では，前半部分は，実質上，拙稿(2005b）でなされているので，その後半部分の証明に当てられている．ほぼKohlberg and Mertens（1986）による証明に沿って行なっているが，筆者が補った部分も多い．

２．表記と同相写像[4)]

まず，ゲーム$G=(I,S,u)$において，プレイヤーの集合Iと各プレイヤーのもつ純戦略集合$S_i\ (i \in I)$を固定する．ただし，Iと$S_i\ (\forall i \in I)$はともに有限集合とし，プレイヤーの数をn，プレイヤー$i\ (\in I)$の純戦略の個数をm_iで表わす．Sは純戦略空間$S=\times_{i \in I} S_i$，uは結合利得関数$u=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$であり，$u_i\ (i \in I)$はプレイヤーiの利得関数である，すなわち，$u_i: S \to \mathbf{R}$（$\mathbf{R}$は実数の集合とする）．プレイヤーの数とそれぞれのプレイヤーのもつ純戦略の個数が等しいゲームどうしは同じ型（same type）であると呼ぶことにする．つまり，同じ型の２つのゲームは，少なくとも１人のプレイヤーの利得関数のみが異なるゲームのことである．したがって，ある同じ型のすべてのゲームの集合は利得関数空間Γで表わすことができる．表記の煩雑さを軽減するために，プレイヤー$i\ (\in I)$の純戦略の個数をm_iで表わしたとき，$|S_i|=m_i$，$|S|=\Pi_{i \in I} m_i$，$|S_{-i}|=\Pi_{j \in I-\{i\}} m_j$のように表わすこともある．ただし，$\Pi$は単純な掛け算を表わす記号とする．

Γ_iをプレイヤー$i\ (i \in I)$の利得関数空間とするとき，$\Gamma_i=\mathbf{R}^{|S|}$であり，利得関数空間$\Gamma$を直積$\Gamma=\times_{i \in I} \Gamma_i$で表わす．したがって，利得関数空間$\Gamma$は$n \times |S|$次元ユークリッド空間$\mathbf{R}^{n \times |S|}$と同一視することができる．ただし，$n$はプレイヤーの数である．プレイヤー$i \in I$の利得行列を$\mathrm{M}_i$で表わす．$\mathrm{M}_i$は$S_i \times S_{-i}$行列であり，プレイヤー$i$の利得関数空間$\Gamma_i$はすべての$\mathrm{M}_i$の集合と考えることができる．したがって，$I$と$S$が固定されているので，ゲーム

4）本章は，拙稿(2005b）で得た結果の要約である．詳細や具体例は拙稿(2005b）を参照して欲しい．

$G=(I,S,u)$は，$\mathbf{M}=(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2,\cdots,\mathrm{M}_n)$と表わすことができる．

ここで，プレイヤーiの利得行列M_iの(s_i,s_{-i})成分を$M_i^{s_i}(s_{-i})$で表わし，

$$M_i^{s_i}(s_{-i})=\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})+\mu_i^{s_i} \tag{2.1}$$

のように2つの実数$\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})$と$\mu_i^{s_i}$の和で表わす．ただし，

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})=0, \qquad \mu_i^{s_i}=\frac{\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}M_i^{s_i}(s_{-i})}{|S_{-i}|}$$

となるように取っている．$\mu_i^{s_i}$は，プレイヤー$i\in I$が純戦略$s_i\in S_i$を選択したときに得られる単純な平均利得である．$\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})$を成分にもつ$S_i\times S_{-i}$型行列を

$$\tilde{\mathrm{M}}_i=\begin{pmatrix}(\tilde{M}_i^{s_i^1}(s_{-i}))_{s_{-i}\in S_{-i}}\\(\tilde{M}_i^{s_i^2}(s_{-i}))_{s_{-i}\in S_{-i}}\\\vdots\\(\tilde{M}_i^{s_i^{m_i}}(s_{-i}))_{s_{-i}\in S_{-i}}\end{pmatrix}\quad \left(\text{ただし，}\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\tilde{M}_i^{s_i^h}(s_{-i})=0,\ h=1,2,\cdots,m_i\right) \tag{2.2}$$

で表わし，$m_i(=|S_i|)$次元縦ベクトルを$\mu_i=(\mu_i^{s_i})^T_{s_i\in S_i}$（上付きの$T$は転置を表わす．以後も同じ）で表わす．$\mathrm{M}_i$を，行列$\tilde{\mathrm{M}}_i$とベクトル$\mu_i$をパラメータとしてそれらを組にした，$(\tilde{\mathrm{M}}_i,\mu_i)$で表わす．すると，プレイヤー$i\ (i\in I)$の利得関数空間$\Gamma_i$はすべての組$(\tilde{\mathrm{M}}_i,\mu_i)$の集合とみなすことができる．さらに，$\tilde{\mathbf{M}}=(\tilde{\mathrm{M}}_1,\tilde{\mathrm{M}}_2,\cdots,\tilde{\mathrm{M}}_n)$，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$とおけば，同じ型のゲームの集合$\Gamma$はすべての組$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$の集合とみなされる．なお，$\tilde{\mathbf{M}}$をゲーム$G\ (=\mathbf{M})\in\Gamma$の基底ゲーム(base game）と呼ぶことにする．

(2.1）の記法を使うと，ゲーム$G=(I,S,u)$を混合拡大した$G=(I,\Delta,\pi)$において，$\boldsymbol{\sigma}_{-i}\in\Delta_{-i}$に対して，プレイヤー$i\in I$が純戦略$s_i\in S_i$を選択したときに得られる期待利得は

$$\pi_i(s_i,\boldsymbol{\sigma}_{-i})=\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\{\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})+\mu_i^{s_i}\}\boldsymbol{\sigma}_{-i}(s_{-i})=\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})\boldsymbol{\sigma}_{-i}(s_{-i})+\mu_i^{s_i} \tag{2.3}$$

となる．同じ型のゲームの集合Γでは，プレイヤーの集合Iと各プレイヤーのもつ純戦略集合$S_i\ (i\in I)$は固定されているので，以後，ゲーム$G=(I,S,u)\ (\in\Gamma)$を$G=(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$で表わす．ただし，ゲーム$G$は混合拡大されているものとする．

ナッシュ均衡対応$\Delta^{NE}:\Gamma\to\Delta$とは，任意のゲーム$G\in\Gamma$からそのゲームのナッシュ均衡集合$\Delta^{NE}(G)$への写像のことであり，そのグラフを

$$\mathcal{G}(\Delta^{NE})=\{(G,\boldsymbol{\sigma})\in\Gamma\times\Delta \mid \boldsymbol{\sigma}\in\Delta^{NE}(G)\} \tag{2.4}$$

で表わす．このとき，同相写像(homeomorphism)[5] $\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\to\mathcal{G}(\Delta^{NE})$が次のように構成される．

5）XとYを位相空間とするとき，写像$f:X\to Y$が同相写像あるいは位相写像であるとは，fが連続な全単射

まず，任意にゲーム$G=(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\in\Gamma$（ただし，$\mu=(\mu_i)_{i\in I}$）が与えられたとき，$\mu_i=(\mu_i^{s_i})^T_{s_i\in S_i}$に対して，

$$\varphi_i^{s_i}(\mu)=\max\{0,\mu_i^{s_i}-\alpha_i\} \qquad (\alpha_i \text{は} \sum_{s_i\in S_i}\max\{0,\mu_i^{s_i}-\alpha_i\}=1\text{を満たす実数}) \tag{2.5}$$

とおいてできる$\varphi_i(\mu)=(\varphi_i^{s_i}(\mu))_{s_i\in S_i}$は，プレイヤー$i\ (\in I)$の混合戦略になっている．

この操作をすべてのプレイヤーに対して行ない，それらを組にした混合戦略プロファイルを$\varphi(\mu)=(\varphi_i(\mu))_{i\in I}$とおく．$\varphi(\mu)$は，$\mu=(\mu_i)_{i\in I}\in\times_{i\in I}\mathbf{R}^{m_i}$が与えられると一意に定まるので，$\times_{i\in I}\mathbf{R}^{m_i}$から混合戦略空間$\Delta$への写像であり，$\varphi:\times_{i\in I}\mathbf{R}^{m_i}\to\Delta$と表わされる．

次に，$\varphi_{-i}(\mu)=(\varphi_1(\mu),\cdots,\varphi_{i-1}(\mu),\varphi_{i+1}(\mu),\cdots,\varphi_n(\mu))\in\Delta_{-i}$，$\varphi_{-i}^{s_{-i}}(\mu)=\Pi_{j\in I-\{i\}}\varphi_j^{s_j}(\mu)$とおき，すべての$s_i\in S_i$について

$$\eta_i^{s_i}=\mu_i^{s_i}-\varphi_i^{s_i}(\mu)-\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})\varphi_{-i}^{s_{-i}}(\mu) \tag{2.6}$$

を求める．これらの$\eta_i^{s_i}$から$\eta_i=(\eta_i^{s_i})^T_{s_i\in S_i}$を作り，プレイヤー$i$のパラメータ表示された利得行列$(\tilde{\mathrm{M}}_i,\eta_i)$を作る．この操作をすべてのプレイヤーに対して行なえば，ゲーム$G'=(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$が得られる．ただし，$\eta=(\eta_i)_{i\in I}$である．このとき，$\varphi(\mu)$はゲーム$(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$のナッシュ均衡点になっており，$\alpha_i$はこのナッシュ均衡点におけるプレイヤー$i$の均衡利得になっている[6]．

この同相写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\to\mathcal{G}(\Delta^{NE})$は，任意のゲーム$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\in\Gamma$を，（2.5）と（2.6）の操作によって求めた$\varphi(\mu)=(\varphi_i)_{i\in I}$と$\eta=(\eta_i)_{i\in I}$および$\tilde{\mathbf{M}}$で構成される$((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\varphi(\mu))\in\Gamma\times\Delta^{NE}(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$に写す写像のことである．利得関数空間$\Gamma$とナッシュ均衡対応のグラフ$\mathcal{G}(\Delta^{NE})$の間に同相写像$\boldsymbol{\varphi}:\Gamma\to\mathcal{G}(\Delta^{NE})$が存在しているので，$\Gamma$と$\mathcal{G}(\Delta^{NE})$は位相同型(homeomorphic）であり，このことを記号$\Gamma\cong\mathcal{G}(\Delta^{NE})$で表わす．

3．ゲーム間の距離と射影写像

まず，集合$\Gamma=\{(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\}$上にノルムを導入する．ここでは，$\|\bullet\|$を最大値ノルムとし，ゲーム$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\in\Gamma$の基底ゲーム$\tilde{\mathbf{M}}\in\Gamma$のノルムと$\mu\in\times_{i\in I}\mathbf{R}^{m_i}$のノルムを，

$$\|\tilde{\mathbf{M}}\|=\max_{(s_i,s_{-i})\in S,i\in I}|\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})|, \qquad \|\mu\|=\max_{s_i\in S_i,i\in I}|\mu_i^{s_i}| \tag{3.1}$$

で定義する．そして，ゲーム$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\in\Gamma$のノルムを

かつその逆写像$f^{-1}:Y\to X$も連続である場合をいう．XとYの間に同相写像が存在するとき，XとYは位相同型（homeomorphic）である，あるいは，XとYは同相であるという．

6）拙稿(2005b）で証明している．

$$\|(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\| = \max\{\|\tilde{\mathbf{M}}\|, \|\mu\|\} \tag{3.2}$$

で定義する[7]．このようなノルムを導入することにより，ゲーム間の距離を測ることができるようになる[8]．同じ型の２つのゲーム$G=(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$と$G'=(\tilde{\mathbf{M}}',\mu')$に対して，それらの距離を

$$d(G,G') = \|(\tilde{\mathbf{M}}'-\tilde{\mathbf{M}},\mu'-\mu)\| \tag{3.3}$$

で定義する．もちろん，$\tilde{\mathbf{M}}=\tilde{\mathbf{M}}'$の場合には，

$$d(G,G') = \|\mu'-\mu\| \tag{3.4}$$

となる．

命題3.1.　$\varphi(\tilde{\mathbf{M}},\mu)=((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\varphi(\mu))$であるとき，$\mu$と$\eta$は$\times_{i\in I}\mathbf{R}^{m_i}$上の直径が$1+\|\tilde{\mathbf{M}}\|$の球内に存在する．

（証明）(2.6) 式を次のように変形する；

$$\mu_i^{s_i}-\eta_i^{s_i}=\varphi_i^{s_i}(\mu)+\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})\varphi_{-i}^{s_{-i}}(\mu).$$

両辺の絶対値をとり，三角不等式を適用すれば，

$$|\mu_i^{s_i}-\eta_i^{s_i}|\le|\varphi_i^{s_i}(\mu)|+|\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\tilde{M}_i^{s_i}(s_{-i})\varphi_{-i}^{s_{-i}}(\mu)|$$

となる．$\|\varphi\|=\max_{s_i\in S_i,i\in I}\{\varphi_i^{s_i}(\mu)\}\in[0,1]$（$\because\varphi_i^{s_i}(\mu)$は，$s_i$に割り当てられた確率）だから，

$$\|\mu-\eta\|\le 1+\|\tilde{\mathbf{M}}\| \tag{3.5}$$

が成り立つ[9]．□

命題3.1より，μとηは直径$1+\|\tilde{\mathbf{M}}\|$の球内に存在するので，これらの任意の凸結合$t\mu+(1-t)\eta\ (0\le t\le 1)$が，同じ直径$1+\|\tilde{\mathbf{M}}\|$の球内に存在することは明らかである(図3.1)．

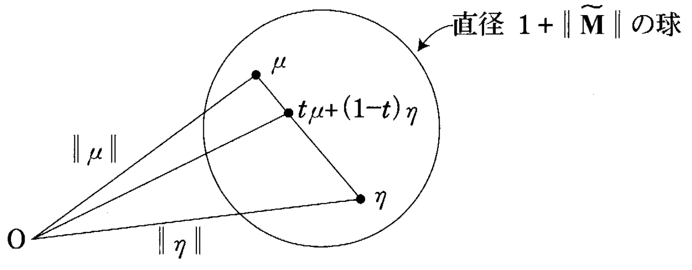

図3．1．μとηのノルムと距離

7）このように定義した$\|\bullet\|$がΓ上のノルムであることは，次の(1)～(3)が成り立つことを確かめればよい．
(1)　$\|(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\|\ge 0$,　　$\|(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\|=0\Leftrightarrow\|\tilde{\mathbf{M}}\|=0,\|\mu\|=0$,
(2)　$\|\alpha(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\|=|\alpha|\|(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\|$，（$\alpha$は任意の実数），　(3)　$\|(\tilde{\mathbf{M}},\mu)+(\tilde{\mathbf{M}}',\mu')\|\le\|(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\|+\|(\tilde{\mathbf{M}}',\mu')\|$.

8）Tsun and Jia-He(1962) がゲーム間の距離を最初に定義した論文であると思われるが，それでは，２つのゲームでの最大利得差を２つのゲームの距離と定義しているので，本稿での距離とは異なる．ただし，$\tilde{\mathbf{M}}=\tilde{\mathbf{M}}'$である２つのゲームに関しては，Tsun and Jia-He(1962) の距離と一致する．

9）$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\in\Gamma$と$(\tilde{\mathbf{M}},\eta)\in\Gamma$において，$\|\mu-\eta\|$はこれら２つのゲームの間の距離を意味するので，$\|\mu-\eta\|\le 1+\|\tilde{\mathbf{M}}\|$は，２つのゲーム$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$と$(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$が直径$1+\|\tilde{\mathbf{M}}\|$の球内に存在することを意味する．

ナッシュ均衡対応のグラフ$\mathcal{G}(\Delta^{NE})$からゲームの集合（利得関数空間）への射影写像$p:\mathcal{G}(\Delta^{NE})\to\Gamma$とは，任意に$((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\boldsymbol{\sigma})\in\Gamma\times\Delta^{NE}$ $(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$が与えられたとき，$((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\boldsymbol{\sigma})$から$(\tilde{\mathbf{M}},\eta)$へ写す写像のことである．ただし，$\mathcal{G}(\Delta^{NE})$と$\Gamma$は局所コンパクト空間(locally compact space)[10]であるから，それぞれに無限遠点（∞）を付け加えて1点コンパクト化したものをそれぞれ，$\overline{\mathcal{G}(\Delta^{NE})}$，$\overline{\Gamma}$で表わし，$p:\mathcal{G}(\Delta^{NE})\to\Gamma$を拡張した$\overline{p}:\overline{\mathcal{G}(\Delta^{NE})}\to\overline{\Gamma}$においては，$\overline{p}(\infty)=\infty$と定義されているものとする．

なお，1点コンパクト化とは，直観的には，次のようなものである．たとえば，座標平面$\mathbf{R}^2$（xy平面）の場合，座標空間$\mathbf{R}^3$（xyz空間）を考え，原点に直径rの球面を乗せ，球の頂点$(0,0,r)$から$\mathbf{R}^2$へ延びる直線を引けば，この直線と$\mathbf{R}^2$の交点と，この直線と球面との交点とは1対1に対応する（図3.2では，$\mathbf{R}^2$上の点aが球面上の点bに対応している）．ここで，$\mathbf{R}^2$の無限遠点∞を球面の頂点$(0,0,r)$に対応させれば，コンパクトでない$\mathbf{R}^2$を$\mathbf{R}^3$上の球面（これは，$\mathbf{R}^3$上のコンパクト集合）とみなすことができる．利得関数空間Γも有限次元ユークリッド空間にすぎないので，同じようにして1点コンパクト化できる．

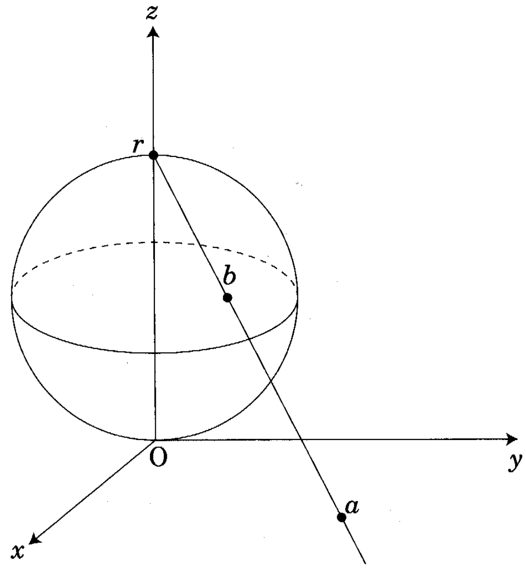

図3．2．$\mathbf{R}^2$の1点コンパクト化

4．ホモトピー同値性

まず，第1章で挙げたTHEOREM 1の主張を理解するために，若干の数学的定義を記す．以下，写像$f:X\to Y$の$D\subset X$への制限を$f|D:X\to Y$のように表わし，写像fとgの合成を$g\circ f$で

10）位相空間Xの各点xに対して，その近傍U_xの閉包$\overline{U_x}$でコンパクトなものが存在するとき，Xは局所コンパクト(locally compact)であるという．$\mathcal{G}(\Delta^{NE})$とΓが局所コンパクト空間であることは明らかである．

表わす.

I を閉区間 $I=[0,1]$ とする. 位相空間 X から Y への2つの連続写像 $f, g: X \to Y$ に対して, 連続写像 $F: X \times I \to Y$ で, $F|(X \times \{0\})=f$, $F|(X \times \{1\})=g$ となる F が存在するとき, f と g とはホモトープ(homotopic) であるといい, 記号 $f \simeq g$ で表わす. このとき, F を X と Y の間のホモトピー(homotopy) という.

次は, 位相空間 X と Y のホモトピー同値性の定義である. 2つの恒等写像を $1_X: X \to X$, $1_Y: Y \to Y$ で表わす. X と Y の間に, 連続写像 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$ で,

$$g \circ f = 1_X, \qquad f \circ g = 1_Y$$

となるものが存在するとき, X と Y はホモトピー同値 (homotopy equivalent) であるといい, 記号 $X \simeq Y$ で表わす. ホモトピー同値という概念は, 一種の同値関係である.

定義から, X と Y が位相同型ならば, X と Y はホモトピー同値となる($X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$).

以上のことから, 次のことが分かる. 利得関数空間 Γ とナッシュ均衡対応のグラフ $\mathcal{G}(\Delta^{NE})$ が位相同型($\Gamma \cong \mathcal{G}(\Delta^{NE})$)であることは, 第2章の最後に述べた. したがって, Γ と $\mathcal{G}(\Delta^{NE})$ はホモトピー同値である($\Gamma \simeq \mathcal{G}(\Delta^{NE})$). ここで, 利得関数空間 Γ 上の恒等写像を $1_\Gamma: \Gamma \to \Gamma$, ナッシュ均衡対応のグラフ $\mathcal{G}(\Delta^{NE})$ 上の恒等写像を $1_{\mathcal{G}(\Delta^{NE})}: \mathcal{G}(\Delta^{NE}) \to \mathcal{G}(\Delta^{NE})$ で表わすとき,

$$g \circ f = 1_\Gamma, \qquad f \circ g = 1_{\mathcal{G}(\Delta^{NE})}$$

となる2つの連続写像 $f: \Gamma \to \mathcal{G}(\Delta^{NE})$ と $g: \mathcal{G}(\Delta^{NE}) \to \Gamma$ が存在することになる.

実は, Theorem 1は, この f に対応するのが第2章で述べた同相写像 $\boldsymbol{\varphi}: \Gamma \to \mathcal{G}(\Delta^{NE})$ であり, g に対応するのが第2章で定義した射影写像 $p: \mathcal{G}(\Delta^{NE}) \to \Gamma$ になり得ることと同値なのである. ただし, $\overline{p}: \overline{\mathcal{G}(\Delta^{NE})} \to \overline{\Gamma}$ においては, $\overline{p}(\infty)=\infty$ と定義されているものとする.

ここで, 写像 $H: \overline{\Gamma} \times [0,1] \to \overline{\Gamma}$ に対して, 記号の簡略化のために, H の $\overline{\Gamma} \times \{t\}$ への制限を, $H_t = H|(\overline{\Gamma} \times \{t\})$ とおき,

$$H_t(\tilde{\mathbf{M}}, \mu) = (\tilde{\mathbf{M}}, t\mu + (1-t)\eta), \qquad \forall t \in [0,1] \tag{4.1}$$

とする. ただし, $H_t(\infty)=\infty$ とする. 次の定理4.1 (Theorem 1の言い換え) で証明すべきは, このように定義された H が $p \circ \boldsymbol{\varphi}$ と 1_Γ の間のホモトピーになっていることだけである.

定理4.1 (Kohlberg and Mertens 1986)[11]. $p \circ \boldsymbol{\varphi}$ は Γ の恒等写像 $1_\Gamma: \Gamma \to \Gamma$ とホモトープである.

---

11) 証明しやすくするために, 拙稿 (2005b) で得た結果を基にして本稿の記法を使い, Theorem 1をより明瞭に言い換えた. ただし, Theorem 1の「$\overline{p}$ はある同相写像とホモトープである」という言い方は数学的に不正確であるから削除した. この不正確な言い方があえてなされているのは, Γ と $\mathcal{G}(\Delta^{NE})$ のホモトピー同値性を強調し, Γ を $\mathcal{G}(\Delta^{NE})$ に単純に変形できることを言いたかったのであろう.

ただし，射影写像$p:G(\Delta^{NE})\to\Gamma$は，$\overline{p}:\overline{G(\Delta^{NE})}\to\overline{\Gamma}$に拡張され，$\overline{p}(\infty)=\infty$とする．

（証明）（4.1）式のように定義されたHにおいて，$H_0=p\circ\boldsymbol{\varphi}$，$H_1=1_\Gamma$は明らか．これらは連続であり，$H$は$\Gamma\times[0,1]$上で連続である．よって，後は，$H$が$\{\infty\}\times[0,1]$上のすべての点で連続であることを示すだけであるが，このことは，

$$\forall L\in\mathbf{R},\exists K\in\mathbf{R};\|(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\|\geq K\Rightarrow\|H_t(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\|\geq L,\forall t\in[0,1] \tag{4.2}$$

と同値である[12]．$\|\bullet\|$は第3章で定義した最大値ノルムである．以下，（4.2）を示すが，$\|\tilde{\mathbf{M}}\|\geq L$の場合には明らかに（4.2）は成り立つので，$\|\tilde{\mathbf{M}}\|<L$の場合だけを示せばよい．

$\|\tilde{\mathbf{M}}\|<L$の場合には，$\|t\mu+(1-t)\eta\|\geq L$となるようにKを選ばなくてはならない．そこで，Kの選び方だが，命題3.1と図3.1から，$\forall L\in\mathbf{R}$に対して，$K=2L+1$を選べばよいことが直観的に分かる．後は，このKの選び方が正しいことを確認するだけである．

$\|\tilde{\mathbf{M}}\|<L$と仮定しているので，$\|(\tilde{\mathbf{M}},\mu)\|\geq K=2L+1$ならば，ノルムの定義（3.2）より，$\|\mu\|\geq 2L+1$である．よって，$\|\tilde{\mathbf{M}}\|<L$かつ$\|\mu\|\geq 2L+1$のとき，$\forall t\in[0,1]$に対して，$\|t\mu+(1-t)\eta\|\geq L$となることを示せばよい．以下，このことを示す．

命題3.1より，μとηは直径$1+\|\tilde{\mathbf{M}}\|$の球内に存在し，$\|\tilde{\mathbf{M}}\|<L$のとき，$\|\eta\|\geq\|\mu\|\geq 2L+1$ならば，$\forall t\in[0,1]$に対して，$\|t\mu+(1-t)\eta\|\geq L$は明らか．残りは，$\|\eta\|<\|\mu\|$の場合だけである．ノルムの性質，$|\|\mu\|-\|\eta\||\leq\|\mu-\eta\|$より，（3.5）から，

$$|\|\mu\|-\|\eta\||\leq 1+\|\tilde{\mathbf{M}}\| \tag{4.3}$$

が成り立つ．$\|\eta\|<\|\mu\|$のとき，（4.3）は，

$$\|\mu\|-\|\eta\|\leq 1+\|\tilde{\mathbf{M}}\| \tag{4.4}$$

とできる．さらに，（4.4）を

$$\|\eta\|\geq\|\mu\|-(1+\|\tilde{\mathbf{M}}\|)$$

と変形すると，$\|\mu\|\geq 2L+1$，$\|\tilde{\mathbf{M}}\|<L$だから，$\|\eta\|\geq L$となることが分かる．これより，$\forall t\in[0,1]$に対して，$\|t\mu+(1-t)\eta\|\geq L$となる．□

証明の最後の$\|\mu\|\geq 2L+1$，$\|\tilde{\mathbf{M}}\|<L$，$\|\eta\|\geq L$から，$\|t\mu+(1-t)\eta\|\geq L$ $(\forall t\in[0,1])$となるところは分かり難いが，次の図4.1を見れば直観的に理解できる．図4.1だけを見ると，$\|\mu\|\geq 2L+1$，$\|\eta\|\geq L$だけでも，$\|t\mu+(1-t)\eta\|\geq L$ $(\forall t\in[0,1])$が言えそうだが，$\|\tilde{\mathbf{M}}\|<L$の場合には成り立たないことがある．たとえば，μとηだけでなく原点Oまで，直径$1+\|\tilde{\mathbf{M}}\|$の球内にある場合である（図4.2）．図4.2の場合には，たとえば，$\|\eta\|=L$のときには，

12）（4.2）は，直観的には，$(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$を大きくとっていけば，$H_t(\tilde{\mathbf{M}},\mu)$はいくらでも大きくなっていくということである．

$\| t\mu+(1-t)\eta \|<L$となる$t\in[0,1]$が存在する可能性がある．

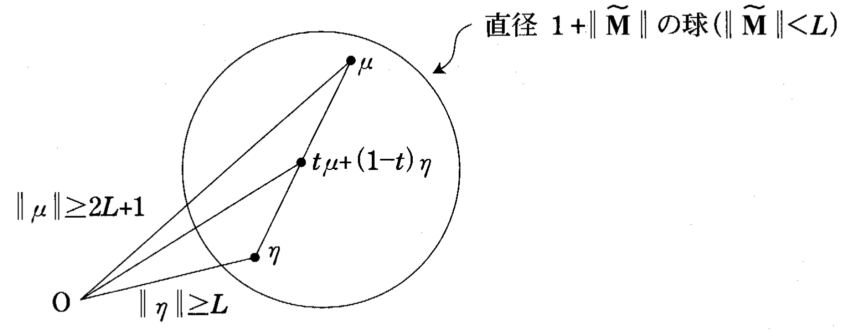

図4．1．$\|\tilde{\mathbf{M}}\|<L$の場合

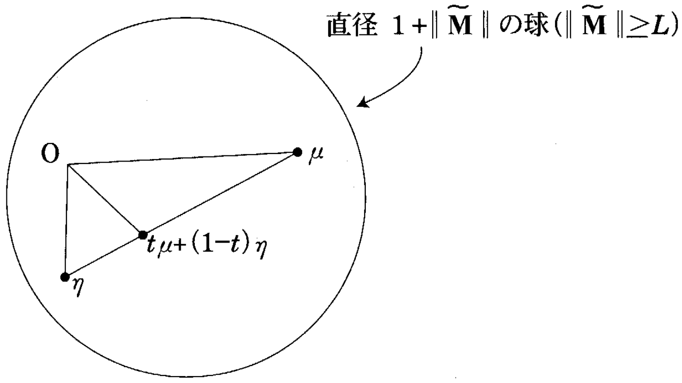

図4．2．$\|\tilde{\mathbf{M}}\|\geq L$の場合

合成$\boldsymbol{\varphi}\circ p:\mathcal{G}(\Delta^{NE})\to\mathcal{G}(\Delta^{NE})$が恒等写像$1_{\mathcal{G}(\Delta^{NE})}:\mathcal{G}(\Delta^{NE})\to\mathcal{G}(\Delta^{NE})$とホモトープであることも，定理4.1とほぼ同じようにして示される．ただし，$\bar{p}:\overline{\mathcal{G}(\Delta^{NE})}\to\bar{\Gamma}$において，$\bar{p}(\infty)=\infty$と定義されているものとする．たとえば，まず，$\forall((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\boldsymbol{\sigma})\in\mathcal{G}(\Delta^{NE})$に対して，

$$p((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\boldsymbol{\sigma})=(\tilde{\mathbf{M}},\eta),\qquad \boldsymbol{\varphi}(\tilde{\mathbf{M}},\eta)=((\tilde{\mathbf{M}},\nu),\varphi(\eta))$$

とおくと，$\boldsymbol{\varphi}\circ p((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\boldsymbol{\sigma})=((\tilde{\mathbf{M}},\nu),\varphi(\eta))$である．ただし，$\nu=(\nu_i)_{i\in I}$, $\nu_i=(\nu_i^{s_i})_{s_i\in S_i}$は，(2.5)の操作によって得られるものとする．このとき，$\boldsymbol{\varphi}\circ p$と$1_{\mathcal{G}(\Delta^{NE})}$の間のホモトピーを

$$W_t((\tilde{\mathbf{M}},\eta),\boldsymbol{\sigma})=((\tilde{\mathbf{M}},t\eta+(1-t)\nu),t\boldsymbol{\sigma}+(1-t)\varphi(\eta))\qquad\text{（ただし，}W_t(\infty)=\infty\text{）}$$

とすればよい．

THEOREM 1（定理4.1）は，「ナッシュ均衡対応のグラフ（ただし，点∞を付け加えてコンパクト化されている）は，（同様にコンパクト化された）標準形ゲームの集合からなる球の周りにあるゴム状球の変形のようなものである」[13]ことを主張している．このことから，次のことが直観的に分かる．

13）Kohlberg and Mertens（1986）の3.2節．原文は，"the graph of the Nash equilibrium correspondence (when compactified by adding the point ∞) is like a deformation of a rubber sphere around the sphere of normal form games (similarly compactified)." 脚注11）の但し書き以下で書いていることの内容である．

まず,「すべてのゲームのナッシュ均衡集合は,有限個の(互いに素な)連結成分を持っている」[14].そこで,$C_1,C_2,\cdots,C_m$をゲーム$G_0\in\Gamma$のナッシュ均衡点を構成する異なる連結成分とする,すなわち,$C_k\subseteq\Delta^{NE}(G_0)(k=1,2,\cdots,m)$.また,すべての$C_k\ (k=1,2,\cdots,m)$は閉包であり,$C_k\cap C_l=\emptyset(k,l=1,2,\cdots,m:k\neq l)$,$\{(G_0,\sigma)\mid\sigma\in C_k\}\subset\overline{\mathcal{G}(\Delta^{NE})}$.

ここで,G_0の近傍を$U_\varepsilon(G_0)\subset\Gamma$で表わし,$C_k$の任意の近傍を$U_\varepsilon(C_k)\subset\Delta$で表わす.いま,$C_k$のすべての近傍$U_\varepsilon(C_k)$が$G_0$のどの近傍にも射影しないとする.要するに,ナッシュ均衡点で構成されている連結成分として近傍$U_\varepsilon(C_k)$(の閉包)を持っているゲームがG_0の近傍には存在しないということである.このことは,G_0のわずかな変形によって,連結成分C_kがG_0の真上から消えてしまうことを意味する.もし,G_0のすべての連結成分$C_k\ (k=1,2,\cdots,m)$がそうであるならば,ゴム状球の変形$\overline{\mathcal{G}(\Delta^{NE})}$は$G_0$の真上で穴が空いてしまうことになる.このことは,THEOREM 1(定理4.1)に矛盾する.

したがって,「任意のゲームのナッシュ均衡集合を構成する連結成分のうち少なくとも1つは,そのゲームの任意の摂動ゲーム(perturbed game)[15]に対して,その連結成分に近いナッシュ均衡点をもつものが存在しなくてはならない」.厳密な証明は本稿では略すが,これは,Kohlberg and Mertens(1986)のPROPOSITION 1の後半部分の基本的な主張である.この主張から,一種の安定性を保証する連結成分がすべてのゲームに存在することが分かる.

参考文献

Fudenberg, D. and J.Tirole (1992), *Game Theory*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.

Kohlberg, E. and J-F. Mertens (1986), "On the strategic stability of equilibria," *Econometrica*, 54, pp.1003-1037.

Myerson, R. (1991), *Game Theory*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Tsun, W.W. and J.Jia-He (1962), "Essential Equilibrium Points of *n*-Person Non-Cooperative Games," *Scientia Sinica*, 10, pp.1307-1322.

van Damme, E. (1987), *Stability and Perfection of Nash Equilibria*, Springer-Verlag, Berlin.

Weibull, J.W. (1995), *Evolutionary Game Theory*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.(邦訳:大和瀬達二監訳『進化ゲームの理論』,オフィス・カノウチ,1998年)

田村一郎(1972),『トポロジー』,岩波書店.

髙尾健朗(2005a),「ナッシュ均衡集合の基本構造とナッシュ写像の性質」,九州産業大学経営学会『経営学論集』,第16巻,第1号,pp.1-23.

髙尾健朗(2005b),「利得関数空間からナッシュ均衡対応のグラフへの同相写像の構成」,九州産業大学経営学会『経営学論集』,第16巻,第1号,pp.25-43.

---

14) Kohlberg and Mertens(1986)のPROPOSITION 1の前半部分.拙稿(2005a)でその意味を例を使って説明している.

15) ゲーム$G_0\in\Gamma$の摂動ゲームとは,G_0の少なくとも1人のプレイヤーの利得関数をわずかに変えたゲームのことである.G_0の近傍$U_\varepsilon(G_0)$内にあるゲームと思えばよい(ただし,G_0そのものは除く).