線形代数の教材について

――平行性を用いた2次の行列式および2次元ベクトルの内積の幾何学的構成――

渋谷謙一・山口　清

（1995年1月20日受理）

1. はじめに

線形代数は現在，大学初年級数学において，微分積分学と共に基本をなす教科である。線形代数は代数的見地から指導されるのが普通である。本稿の目的は線形代数の教材のうち，初等的な題目である2次の行列式および2次元数ベクトルの内積を，平行性に基づいて幾何学的構成を行うことである。ここで用いる方法は D. Hilbert による線分算［2］および座標平面において1点を通る直線 l と座標軸との交点を用いて，平面上の点の数直線への射影を行うことである。そのとき，l が単位直線 $y=x$，または，$y=-x$ に平行な場合が我々の目的に対し重要である。なぜならば，2次の行列式は交代な双1次形式であり，内積は対称な双1次形式だからである。

第2，3節では以下の考察の準備として線分算，座標平面における点演算および座標軸への射影について既知の結果を想起する。第4節では平行性を用いた2次の行列式の幾何学的構成について述べる。この構成では，単位直線に平行な射影を用いる。第5節で2次元数ベクトルの内積の，平行性を用いた，構成について述べる。この構成では，直線 $y=-x$ に平行な射影を用いる。第6節において，以上の構成の応用として，2元連立1次方程式の解の幾何学的構成について考察する。

2. 線分算

ここでは，以下の準備として，D. Hilbert による線分算（Streckenrechnung）［2］を想起しよう。線分算は平行座標平面において，座標軸上の与えられた3点に，平行性を用いて，座標軸上の第4の点を対応させる一つの3項演算である。とくに，単位元0または1を用いる場合にはこの3項演算は2項演算に退化する。

2.1. 実数 a と b の和は，次のように平行四辺形の性質を用いて得られる。

点 $(p,\ 0)$ を通り，y 軸に平行な直線上に点 $(p,\ 0)$ と異なる点を A とし，点 A を通り x 軸に平行な直線 l を定める。点 $(b,\ 0)$ を通り，$(p,\ 0)$ と A を結ぶ直線に平行な直線と l との交点を Q とする。点 Q を通り，A と $(a,\ 0)$ を結ぶ直線に平行な直線と x 軸との交点を P とすると，P の x 座標は和 $a-p+b$ である（図2.1）。とくに，

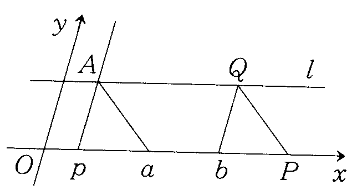

図2.1

$p=0$ のとき，この3項和は2項和 $a+b$ になる。

2.2. 実数 a と b の積は，次のように相似な三角形の性質を用いて得られる。

2.2.1. x 軸上の点 $(a,\ 0)$，y 軸上の点 $(0,\ b)$ に対し，点 $(a,\ 0)$ を通り，定点 $(p,\ 0)$，$p>0$，と $(0,\ b)$ を結ぶ直線に平行な直線と y 軸との交点を P とすると，P の y 座標は積 $ap^{-1}b$ である（図2.2）。とくに，$p=1$ のとき，この3項積は2項積 ab になる。

2.2.2. y 軸上に原点 O と異なる点 A を定める。x 軸上の2点 $(a,\ 0)$，$(b,\ 0)$ に対し，点 $(b,\ 0)$ を通り，定点 $(p,\ 0)$，$p>0$，と A を結ぶ直線に平行な直線と y 軸との交点を Q とする。点 Q を通り，A と $(a,\ 0)$ を結ぶ直線に平行な直線と x 軸との交点を P とすると，P の x 座標は積 $ap^{-1}b$ である（図2.3）。とくに，$p=1$ のとき，この3項積は2項積 ab になる。

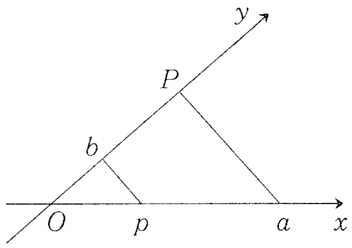

図2.2

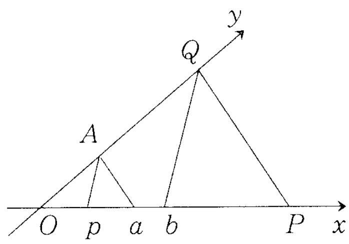

図2.3

3. 座標平面における点演算および数直線への平行射影

3.1. 座標平面における点演算　座標平面 $\boldsymbol{R}^2$上の2点 A, B を $m:n$ の比に内分する点を求めることは $\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像である。三角形の重心を求めることは $\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2$から$\boldsymbol{R}^2$への写像である。ここでは，このような座標平面における点演算の知られた例をあげてみよう。

3.1.1. 独立な3点 $P(a,\ b)$，$Q(c,\ d)$，$R(e,\ f)$ に対し，四辺形 $PRQS$ が平行四辺形となるような点 S を求める3項演算。S の座標は $(a-e+c,\ b-f+d)$ になる。とくに，R が原点 O と一致するとき，$S=(a+c,\ b+d)$ またはベクトル $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の2項和になる。

3.1.2. W.R.Hamilton による複素数平面を考える。すなわち，$\boldsymbol{R}^2$ において，和は3.1.1における2項和，積は $(a,\ b)(c,\ d)=(ac-bd,\ ad+bc)$ によって定義される。積の幾何学的表現について述べる。

（i） 積は，普通，二つの相似三角形の性質を用いて説明される。すなわち，点 O，$(1,\ 0)$，$(a,\ b)$ で定まる三角形と点 O，$(c,\ d)$，P で定まる三角形が同じ向きに相似であるような点 P を求めることであるとして $(a,\ b)$ と $(c,\ d)$ の積が構成される。

（ii） これに対し，M. Koecher [3, 231頁] は幾何学的構成に，線分算の考えを導入している。その根拠は複素数 z，w の絶対値に対し，性質$|zw|=|z||w|$が成立するからである。

（iii） ここでは，複素数 $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の積を，線分算を用いて直接に $ac-bd$，$ad+$

bc を構成することによって求めることを考える。x 軸上に点 $(a,\ 0)$, $(c,\ 0)$, y 軸上に点 $(0,\ b)$, $(0,\ d)$ をとる。点 $(1,\ 0)$ と単位直線 $y=x$ を用いて，第2.2.2節で述べた方法により，点 $(ac,\ 0)$ を構成する。同様に，点 $(0,\ b)$, $(0,\ d)$ から点 $(0,\ bd)$ を構成する。次に，平面上の点 $(ac,\ bd)$ を通り，単位直線に平行な直線と x 軸との交点を P とすると，P の x 座標は $ac-bd$ である（図3.1)。次に，第2.2.1節で述べた方法により，点 $(a,\ 0)$, $(0,\ d)$ から点 $(ad,\ 0)$ を，点 $(c,\ 0)$, $(0,\ b)$ から点 $(0,\ bc)$ を構成する。平面上の点 $(ad,\ bc)$ を通り，直線 $y=-x$ に平行な直線と y 軸との交点を Q とすると，Q の y 座標は $ad+bc$ である。したがって，積 $(a,\ b)(c,\ d)$ を表す点 $(ac-bd,\ ad+bc)$ が得られる（図3.2)。

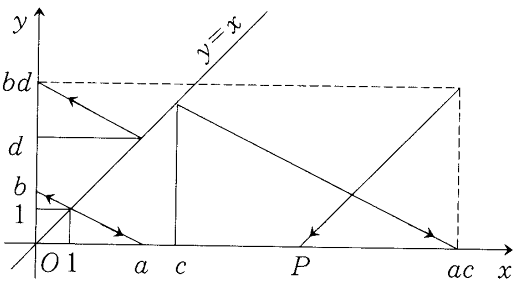

図3.1

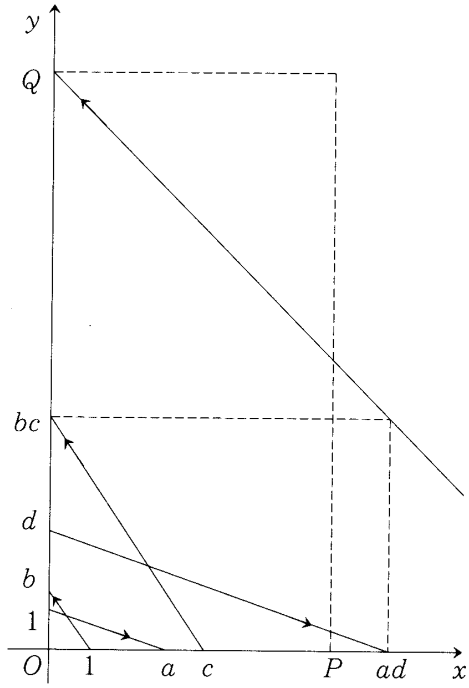

図3.2

3.2 座標平面から座標軸への射影 座標平面上の点 $P(a,\ b)$ をそれぞれ，y 軸，x 軸に沿って x 軸，y 軸へ平行移動すると，数直線上の点 a, b が定まる。平面上の点をこの操作によって実数の対として間接的に表し，代数的計算を行い，その結果を平面上の点に戻し，図形の性質を求めるというのが，解析幾何学における基本的発想である。

2次元の対象を1次元に退化させる考えは Weierstrass による整数の定義にも見出される。この定義は，本質的に，非負数 a, b に対し点 $(a,\ b)$ を単位直線 $y=x$ に沿って x 軸へ平行射影すれば交点は $(a-b,\ 0)$ になることを用いている。

ここでは，この考えを用いて，座標平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上の点 $(a,\ b)$ を通る直線と座標軸との交点を求めて，$\boldsymbol{R}^2$ の点に数直線上の点を対応させる操作を考える。線分算においては，考察の対象となる点は座標軸上の点であるので，この考えは線分算の適用範囲を越えるけれども，平行性を用いた考えである。以下，解析幾何の結果を併用することにする。点 $(a,\ b)$ を通り，傾き $m\ (\neq 0)$ の直線 $l: y-b=m(x-a)$ と x 軸，y 軸との交点はそれぞれ $(a-b/m,\ 0)$, $(0,\ b-ma)$ である。ここで，l と座標軸との交点は $m=1$ のとき，$(a-b,\ 0)$, $(0,\ b-a)$ であり；$m=-1$ のとき，$(a+b,\ 0)$, $(0,\ a+b)$ となり，それぞれ2実数 a,

b の差，和が得られる。この結果を用いて，以下，2次の行列式および2次元数ベクトルの内積の構成を行う。

4．2次の行列式の幾何学的構成

2次の行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ は2次の斉次式 $ad-bc$ として定義される。行列式は各行および各列について双1次かつ交代であるという代数的特性をもつ。幾何学的に，2次の行列式は座標ベクトル $(a,\ c)$，$(b,\ d)$ により定まる平行四辺形の符号をもった面積を表す（例えば，柳井 [4, 130-133頁]）。柳井 [4, 6.2節, 130-135頁] において平行四辺形の面積の性質を用いて，行列式の基本的性質が示されている。本節においては，2次の行列式の幾何学的構成および性質について線分算および点 $(a,\ b)$ を通る直線に沿っての x 軸への射影による結果を用いて考察する。

4.1．2次の行列式の幾何学的構成　2次の行列式 $D:=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ を線分算を基礎として構成する。座標平面において，x 軸上に点 $(a,\ 0)$，$(b,\ 0)$ をとり，y 軸上に点 $(0,\ c)$，$(0,\ d)$ をとる。点 $(0,\ d)$ を通り，点 $(0,\ 1)$ と $(a,\ 0)$ を結ぶ直線に平行な直線と x 軸との交点を P とする。点 P の x 座標は ad である。次に，点 $(b,\ 0)$ を通り，点 $(1,\ 0)$ と $(0,\ c)$ を結ぶ直線に平行な直線と y 軸との交点を Q とする。Q の y 座標は bc である。点 $R(ad,\ bc)$ を通り，単位直線 $y=x$ に沿って x 軸へ平行射影を行えば，図4.1における点 $S(ad-bc,\ 0)$ が得られる。したがって，線分算に基づいた行列式 D の値の幾何学的構成が得られる。

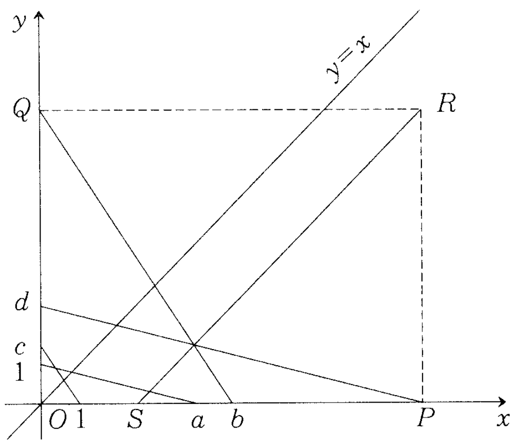

図4.1

4.2．2次の行列式の性質の幾何学的説明　2次の行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1\ \ \boldsymbol{a}_2)$，ここで $\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$，に対し，その行列式を $\det A$ で表す。上述のように，2次の行列式 $\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ の値は点 $R(ad,\ bc)$ を通り，単位直線 $y=x$ に平行な直線と x 軸との交点 S の x 座標である。この性質を用いて，2次の行列式の性質を導く。

性質1．$\det(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2)$ は双1次形式である。

（i）例えば $\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b \\ c_1+c_2 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$ が成立することを示す。

座標平面において,

$$(a_1d,\ bc_1)+(a_2d,\ bc_2)=(a_1d+a_2d,\ bc_1+bc_2)=((a_1+a_2)d,\ b(c_1+c_2))$$

であるから，3点 $P(a_1d,\ bc_1)$, $Q(a_2d,\ bc_2)$, $R((a_1+a_2)d,\ b(c_1+c_2))$ に対し，四辺形 $POQR$ は平行四辺形である。したがって，点 P, Q, R の単位直線 $y=x$ に沿って x 軸への平行射影を行って得られる x 軸上の点をそれぞれ S_1, S_2, S とすると

$$\overrightarrow{OS_1}+\overrightarrow{OS_2}=\overrightarrow{OS}$$

が成り立ち，求める結果が得られる（図4.2)。

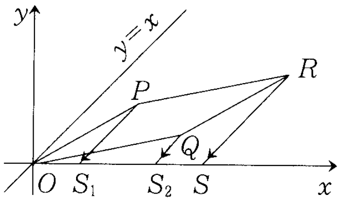

図4.2

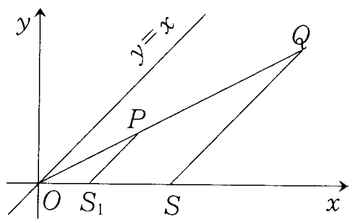

図4.3

（ii） 次に，例えば $\begin{vmatrix} \alpha a & b \\ \alpha c & d \end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ が成り立つことを示す。

$$(\alpha ad,\ \alpha bc)=\alpha(ad,\ bc)$$

であるから，点 $P(ad,\ bc)$, $Q(\alpha ad,\ \alpha bc)$ を単位直線に沿って x 軸に平行射影したときの像をそれぞれ S_1, S とすると $\overrightarrow{OS}=\alpha\overrightarrow{OS_1}$ が成り立ち，求める結果が得られる。(図4.3)。性質（i），（ii）から性質1が導かれる。

性質2．$\det(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2)$ は交代形式である。

$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $D'=\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ とおく。D, D' の値はそれぞれ点 $R(ad,\ bc)$, $R'(bc,\ ad)$ を単位直線 $y=x$ に沿って x 軸に平行射影を行って得られる。点 R' は単位直線に関する点 R の対称点である。したがって，点 R' を通り，単位直線に平行な直線と x 軸との交点は $(-D,\ 0)$ である。

性質3．行列式の値は行と列を交換しても変わらない。

行と列の交換によって点 $R(ad,\ bc)$ は点 $(ad,\ cb)$ になる。ゆえに，点 R は不動であり，求める結果が得られる。

4.3．写像 det の幾何学的表現　V を2次元実ベクトル空間とする。2次の行列式は次の3条件をみたす写像 $f: V\times V\to \boldsymbol{R}$ として特徴づけられることが知られている：

（i） f は双1次写像である，

（ii） f は交代写像である，

（iii） f は基本ベクトルを1に写す。

座標平面において，数ベクトル $(a,\ b)$ に対し，x 軸上に点 $(a,\ 0)$ を，y 軸上に点 $(0,\ b)$ をとる。また，x 軸，y 軸上に定点 $(p,\ 0)$，$(0,\ p)$，$p>0$，をとる。そして，性質（iii）を

（iii）′ $f\left(\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}\right)=1$

によって置き換える。

写像 $f: V\times V\to \boldsymbol{R}$ を次の手続きによって定義する。座標平面 $V=\boldsymbol{R}^2$ において，与えられたベクトル $(a,\ c)$，$(b,\ d)$ に対し，点 $(0,\ d)$ を通り，点 $(0,\ p)$ と点 $(a,\ 0)$ を結ぶ直線に平行な直線と x 軸との交点を P，点 $(b,\ 0)$ を通り，点 $(p,\ 0)$ と $(0,\ c)$ を結ぶ直線に平行な直線と y 軸との交点を Q とする。P，Q の座標はそれぞれ，

$$(ad/p,\ 0),\ (0,\ bc/p)$$

である。点 $R(ad/p,\ bc/p)$ を通り，傾き $m(\neq 0)$ の直線 l と x 軸との交点は

$$((mad-bc)/mp,\ 0)$$

である。そこで

（＊） $f\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)=\dfrac{1}{mp}(mad-bc)$

と定義する（図4.4）。

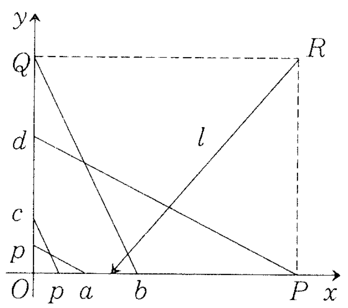

図 4.4

定義式より，明らかに，f は双1次写像であり，条件（i）を満たす。f が条件（ii）を満たすとすると，$(m-1)(ad+bc)=0$ が導かれる。点 $(p,\ 0)$，$(0,\ p)$ に対して $(m-1)p^2=0$，ゆえに $m=1$ が得られる。次に，条件（iii）′ により，$p=1$ となり，f は次の形になる：

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right)=ad-bc$$

逆に，上式（＊）により定義された写像 f は $m=1$，$p=1$ のとき，条件（i），（ii），（iii）′ を満たす。

5. 2次元数ベクトルの内積の幾何学的構成

幾何ベクトル $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ の内積 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$ として定義される，ここで，

$|\boldsymbol{u}|$, $|\boldsymbol{v}|$ はそれぞれ $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の長さ, θ は $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ のなす角である, $|\boldsymbol{v}|\cos\theta$ は $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ への正射影の長さであるから, 内積 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ は次のように線分算を用いて求められる。$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の始点を原点 O にとり, $\boldsymbol{u}$ を通り, $\boldsymbol{u}$ の向きを正の方向にもつ数直線を x 軸にとる。$\boldsymbol{v}$ の終点を x 軸へ正射影した点を $(v',\ 0)$, $\boldsymbol{u}$ の終点を $(u,\ 0)$ とする。単位直線 $y=x$ 上に O と異なる点 A をとる。$(u,\ 0)$ を通り, $(1,\ 0)$ と A を結ぶ直線に平行な直線と単位直線 $y=x$ との交点を Q, 点 Q を通り A と $(v',\ 0)$ を結ぶ直線に平行な直線と x 軸との交点を P とすると, P の座標は

$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v},\ 0)$$

である (図5.1)。

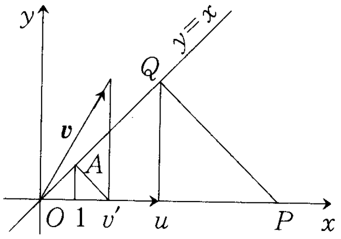

図 5.1

5.1　2次元数ベクトルの内積の幾何学的構成

ここでは, 2次元数ベクトルの内積の線分算に基づいた幾何学的構成を考える。ベクトル $\boldsymbol{u}=(a,\ b)$, $\boldsymbol{v}=(c,\ d)$ に対し, x 軸上の点 $(a,\ 0)$, $(c,\ 0)$ と y 軸上の点 $(0,\ b)$, $(0,\ d)$ を考える。P を点 $(c,\ c)$ を通り, $(1,\ 1)$ と $(a,\ 0)$ を結ぶ直線に平行な直線と x 軸との交点, Q を点 $(d,\ d)$ を通り, $(1,\ 1)$ と $(0,\ b)$ を結ぶ直線に平行な直線と y 軸との交点とすると, P, Q の座標はそれぞれ $(ac,\ 0)$, $(0,\ bd)$ である。点 $R(ac,\ bd)$ を通り, 直線 $y=-x$ に平行な直線と x 軸との交点 S の座標は $(ac+bd,\ 0)$ である。また, この直線と y 軸との交点は $(0,\ ac+bd)$ である。これにより, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ の内積 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ が幾何学的に構成される (図5.2)。

上の内積の構成において, 直線 $y=x$ を用いたけれども, ベクトル $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ に対して, 第2.2.1節の方法を適用すると単位直線を用いることなく点 R が得られる (図5.3)。

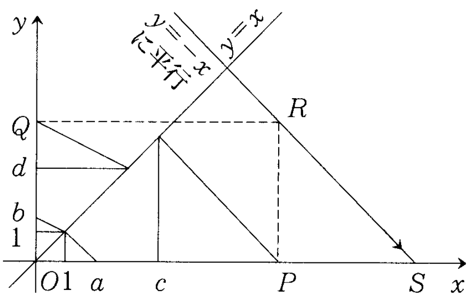

図 5.2

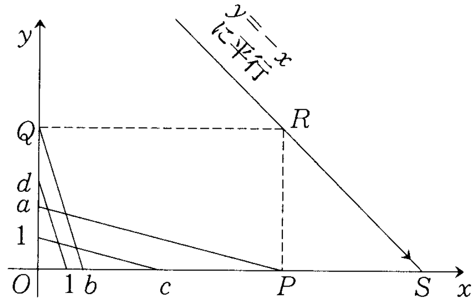

図 5.3

ベクトル $\boldsymbol{u}=(a,\ b)$, $\boldsymbol{v}=(c,\ d)$ の内積について, $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0$ であるための必要十分条件は点 $(ac,\ bd)$ が直線 $y=-x$ 上にあることである。D_1 を直線 $y=-x$ より上の領域, D_2 を直線 $y=-x$ より下の領域とすると,

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}>0 \Longleftrightarrow$ 点 $(ac,\ bd)$ は D_1 の点である,

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}<0 \iff \text{点}\ (ac,\ bd)\ \text{は}\ D_2\ \text{の点である}$$

ことが分かる（図5.4）。

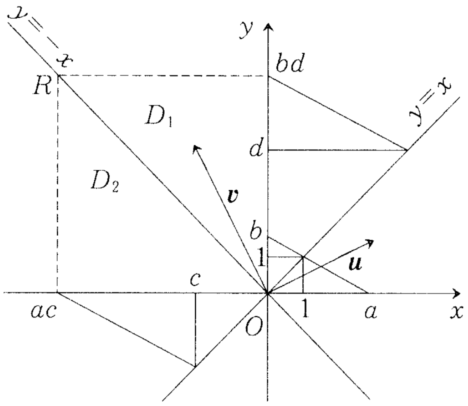

図5.4

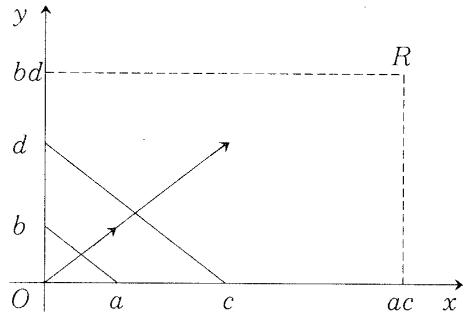

図5.5

ベクトル $\boldsymbol{u}=(a,\ b)$, $\boldsymbol{v}=(c,\ d)$ に対し，点 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ を通る直線と点 $(c,\ 0)$, $(0,\ d)$ を通る直線が平行であるとすると，$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2=|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2$ である。実際，図5.5 において，$c/a=d/b$ であるから，その比を k とおくと，点 R の座標は $(ac,\ bd)=(ka^2,\ kb^2)$ となり，$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2=k^2(a^2+b^2)^2=|\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2$ が得られる。

5.2.　2次元数ベクトルの内積の特性

座標平面において，x 軸，y 軸上にそれぞれ定点 $(p,\ 0)$, $(0,\ p)$, $p>0$, をとる．ベクトル $\boldsymbol{u}=(a,\ b)$, $\boldsymbol{v}=(c,\ d)$ に対し，x 軸上の点 $(a,\ 0)$, $(c,\ 0)$ と y 軸上の点 $(0,\ b)$, $(0,\ d)$ をとる。Q を点 $(c,\ 0)$ を通り，点 $(p,\ 0)$, $(p,\ p)$ を結ぶ直線に平行な直線と単位直線 $y=x$ との交点とする。Q を通り，$(p,\ p)$ と $(a,\ 0)$ を結ぶ直線に平行な直線と x 軸との交点を P とすると，P の座標は $(ac/p,\ 0)$ である。同様の作図によって，y 軸上の点 $(0,\ bd/p)$ が得られる。点 $R(ac/p,\ bd/p)$ を通る傾き $m\,(m\neq 0)$ の直線と x 軸との交点 S の座標は $((mac-bd)/mp,\ 0)$ である（図5.6）。

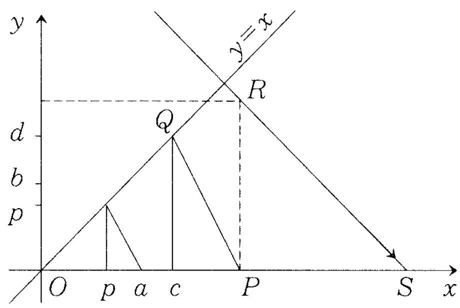

図5.6

そこで，

$$(**)\quad f\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{mp}(mac-bd)$$

により，写像 $f:\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ を定義する。すると，f は対称双1次写像である。次の条件を仮定する。

（i） $J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ とおくとき，$f(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=f(J\boldsymbol{u},\ J\boldsymbol{v})$ が任意の $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}\in\boldsymbol{R}^2$ に対して成り立つ。

（ii） $f\left(\begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix}\right)=1$ が成り立つ。

仮定（i）から，$(m+1)(ac-bd)=0$ が得られる。とくに，$\boldsymbol{u}=(p,\ 0)$，$\boldsymbol{v}=(p,\ 0)$ に対し $m+1=0$ が得られる。また，仮定（ii）から $p=1$ となり，f は次の形になる。

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) = ac+bd$$

逆に，上式 (**) により定義された写像 f は対称双1次写像で，$m=-1$，$p=1$ のとき，上の条件（i），（ii）を満たす。

6. 2元連立1次方程式の幾何学的解法

6.1. 2元連立1次方程式の解の図による説明－線分算の立場から

x，y を未知数とする連立1次方程式 $\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$ の代数的解法として消去法，代入法，Cramer の公式などが知られている。解析幾何の立場からは解を見いだすことは平面上の2直線 $ax+by=p$, $cx+dy=q$ の交点の座標を求めることである。線形幾何学の立場から，解法は普通次のように説明される。

6.1.1. $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ とおくと，方程式は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}$ と書ける。解を求めることはベクトル $\boldsymbol{x}$ に1次変換 A を適用したとき $\boldsymbol{p}$ に移るような $\boldsymbol{x}$ を求めることである。したがって，行列 $\boldsymbol{A}$ が正則ならば $\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ を用いて，方程式の両辺のベクトルに逆変換を適用して，解ベクトル $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{p}$ が得られる。

6.1.2. $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおく。解を求めることは，1次結合 $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{p}$ に一致する，すなわち，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$により定まる平行四辺形の第4頂点が$(p, q)$であるようなスカラー x, y を求めることである。

6.1.3. $\boldsymbol{a}=(a,\ b)$，$\boldsymbol{c}=(c,\ d)$，$\boldsymbol{x}=(x,\ y)$ とおく。解を求めることは，ベクトルの内積に関して $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=p$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=q$ を満たすベクトル x を求めることである。

連立1次方程式の左辺は次のように考えることができる。座標平面上の点 $(ax,\ by)$，$(cx,\ dy)$ を通り，直線 $y=-x$ に平行な直線がそれぞれ x 軸，y 軸と交わる点 P，Q の x 座標，y 座標である。したがって，方程式を解くことは $P=(p,\ 0)$，$Q=(0,\ q)$ となるような数 x，y を求めることである（図6.1）。

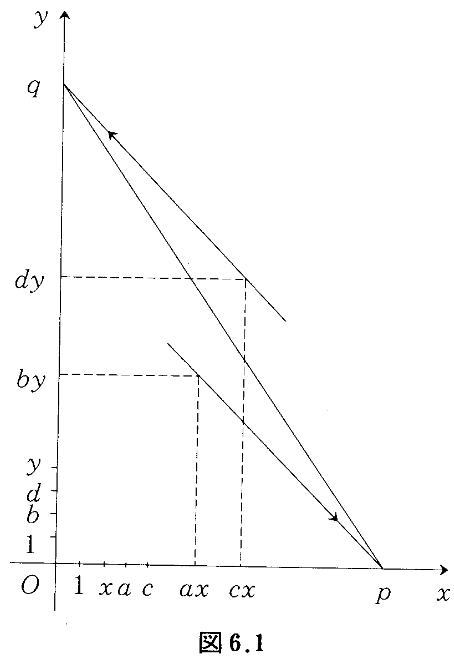

図6.1

6.2. 2元連立1次方程式の解 I

第4節において，線分算を用いて，2次の行列式の構成を行った。この構成の応用として，Cramer の公式を用いて連立1次方程式$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$の解が構成される。

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},\ D_1=\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}$$

とおく。$D\neq 0$ のとき，Cramer の公式により，解は

$$x=\frac{D_1}{D},\ y=\frac{D_2}{D}$$

として与えられるから，線分算によって解が求められる。

6.3. 2元連立1次方程式の解 II

連立方程式$\begin{cases} ax+by=p \\ cx+dy=q \end{cases}$について，解が一意的に定まる場合を考える。知られているように，拡大係数行列 $A=\begin{pmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{pmatrix}$ の行に次の基本変形 R1, R2, R3 を何回か行うことにより，方程式の解が得られる［例えば，1, 第3章］。

R1. A で二つの行を交換する。

R2. A で一つの行に0でない数を掛ける。

R3. A で一つの行の α 倍を他の行に加える。

この基本変形による方程式の解法を線分算の立場から説明してみよう。x 軸上に a, b, p を，y 軸上に c, d, q をとる。すると，R1 は x 軸と y 軸の役割を交換することである。

R2 は線分算によって次のように実行できる。第1行に α ($\neq 0$) を掛ける場合について考えよう。x 軸上の点 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$, $(p,\ 0)$ に対し，y 軸上の点 $(0,\ \alpha)$ をとる。点 $(0,\ \alpha)$ を通り，$(0,\ 1)$ と $(a,\ 0)$ を結ぶ直線に平行な直線と x 軸との交点は $(a\alpha,\ 0)$ である。同様の操作により，点 $(b\alpha,\ 0)$, $(p\alpha,\ 0)$ が得られる（図6.2)。

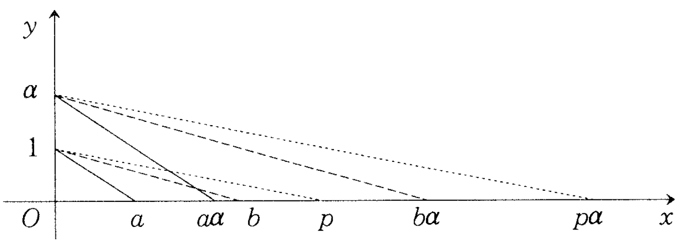

図6.2

また，$(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$, $(p,\ 0)$ からの $(a\alpha,\ 0)$, $(b\alpha,\ 0)$, $(p\alpha,\ 0)$ の構成は次のような作図によっても得られる。x 軸上に点 $(\alpha,\ 0)$ をとる。単位直線 $y=x$ 上に原点と異なる点 A を定める。点 $(a,\ 0)$ を通り，$(1,\ 0)$ と A を結ぶ直線に平行な直線と単位直線との交点を Q とする。Q を通り，A と $(\alpha,\ 0)$ を結ぶ直線に平行な直線と x 軸との交点は $(a\alpha,\ 0)$ である。同様の操作により，点 $(b\alpha,\ 0)$, $(p\alpha,\ 0)$ が得られる（図6.3)。

R3 については，次の行変形を考える。

R3′. A で一つの行を他の行に加える。

第1行 $(a\ b\ p)$ を第2行 $(c\ d\ q)$ に加える場合を考えよう。点 $(c,\ a)$ を通り，直線 $y=-x$ に平行な直線と y 軸との交点は $(0,\ c+a)$ である。同様にして，点 $(0,\ d+b)$，$(0,\ q+p)$ が得られる（図6.4)。R2 と R3′ を組み合わせて，R3 が構成される。

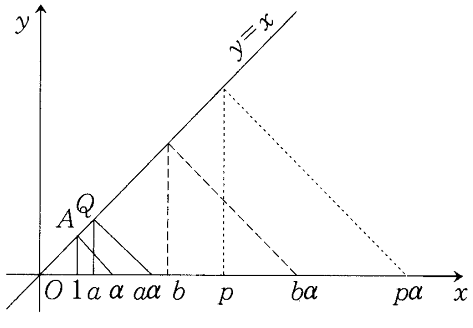

図6.3

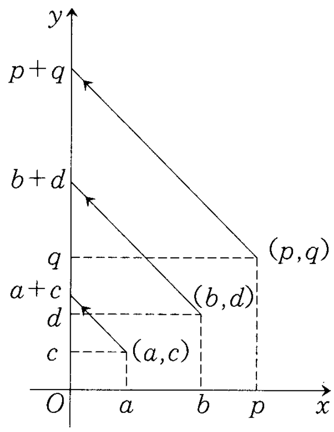

図6.4

例 $\begin{cases} 2x+3y=14 \\ 3x+4y=20 \end{cases}$

行に対する基本変形によって計算すると，次のようになる。右側は拡大係数行列に適用する基本変形の手続きを示す。

Step				
I	2	3	14	
	3	4	20	第1行×$\frac{1}{2}$（図6.5.1)
II	1	$\frac{3}{2}$	7	
	3	4	20	第2行—第1行×3（図6.5.2, 6.5.3)
III	1	$\frac{3}{2}$	7	
	0	$-\frac{1}{2}$	-1	第2行×(−2)（図6.5.4)
IV	1	$\frac{3}{2}$	7	
	0	1	2	第1行—第2行×$\frac{3}{2}$（図6.5.5, 6.5.6)
V	1	0	4	
	0	1	2	

StepIII, V は次のようにそれぞれ三つの手続きに分解される。

				第1行×3（図6.5.2)
III1	3	$\frac{9}{2}$	21	
	3	4	20	第2行—第1行（図6.5.3)
III2	3	$\frac{9}{2}$	21	
	0	$-\frac{1}{2}$	-1	第1行×$\frac{1}{3}$（図6.5.2)

Ⅲ3	1	$\frac{3}{2}$	7	
	0	$-\frac{1}{2}$	-1	
				第2行×$\frac{3}{2}$（図6.5.5）
V1	1	$\frac{3}{2}$	7	
	0	$\frac{3}{2}$	3	第1行—第2行（図6.5.6）
V2	1	0	4	
	0	$\frac{3}{2}$	3	第2行×$\frac{2}{3}$
V3	1	0	4	
	0	1	2	

以上の基本変形による解法を線分算を用いた構成により表現してみよう。x 軸上に3点2, 3, 14を，y 軸上に3点3, 4, 20をとる。

図6.5.1；x 軸上の3点2, 3, 14に1/2を掛けて，それぞれ3点1, 3/2, 7を求める。

図6.5.2；x 軸上の3点1, 3/2, 7に3を掛けて，それぞれ3点3, 9/2, 21を求める。

図6.5.3；3点（3, 3)，(9/2, 4)，(21, 20）を通り，単位直線に平行な直線と y 軸との交点を求め，それぞれ y 軸上の点（3－3)，(4－9/2)，(20－21）を求める。

図6.5.4；y 軸上の3点0, －1/2, －1に－2を掛けて，それぞれ y 軸上の3点0, 1, 2を求める。$y=2$ を得る。

図6.5.5；y 軸上の3点0, 1, 2に3/2を掛けて，それぞれ y 軸上の3点0, 3/2, 3を求める。

図6.5.6；点（1, 0)，(3/2, 3/2)，(7, 3）を通り，単位直線に平行な直線と x 軸との交点を求め，それぞれ x 軸上の3点1, 0, 4を求める。$x=4$ を得る。

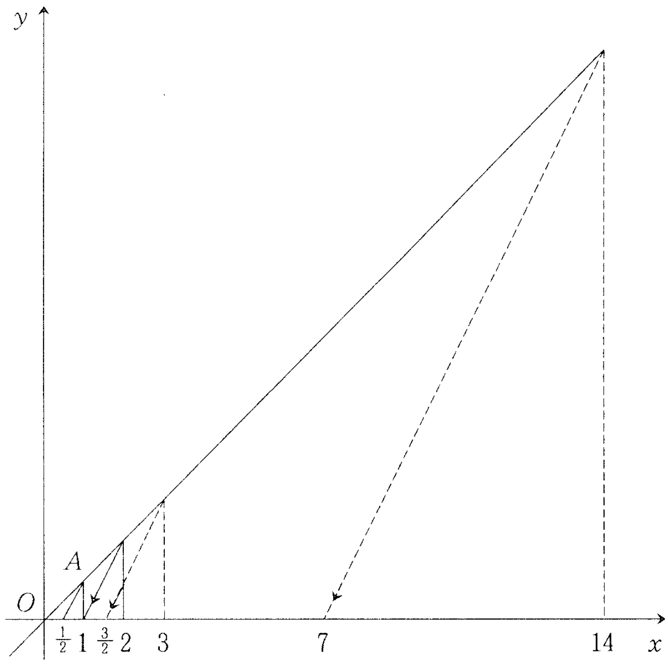

図6.5.1

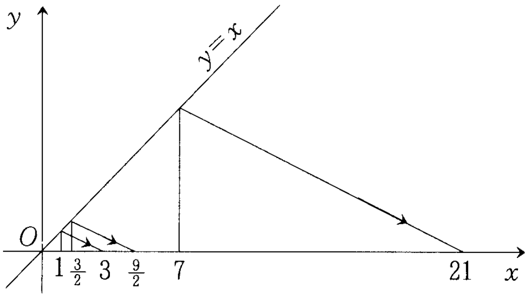

図 6.5.2

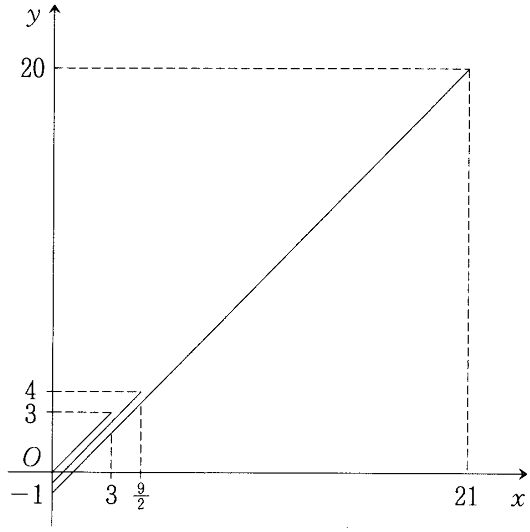

図 6.5.3

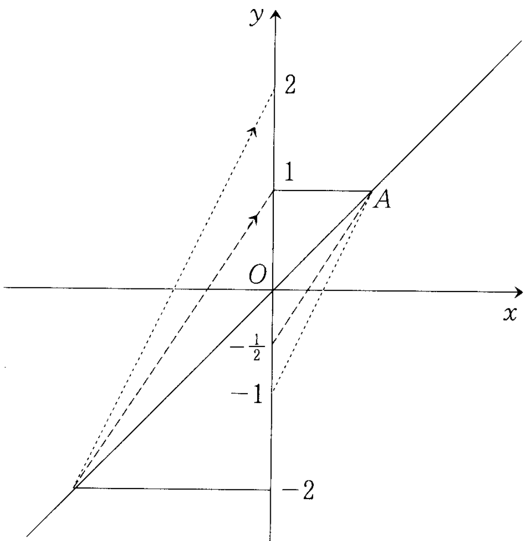

図 6.5.4

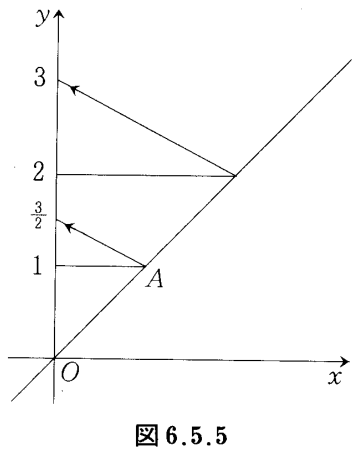

図 6.5.5

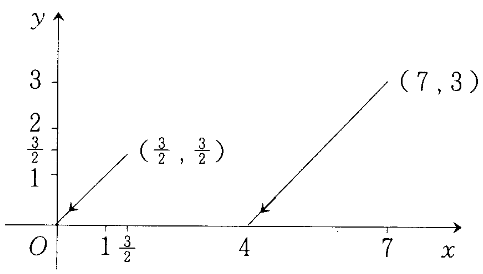

図 6.5.6

7. むすび

行列式，行列の理論は数学の抽象化と共に線形代数として発展してきた。現在，線形代数は大学理工系の初年級数学において微分積分学とともに基礎教科である。高校数学においても，数学教育の現代化に伴って，ベクトル，行列および1次変換など内積をもつベクトル空間の初歩的性質が指導されてきた。

さて，行列は表であると考えることもでき，またベクトル空間からベクトル空間への1次写像を表すものとも考えることができる。2次の行列式は2次の斉次交代式によって定義されるが，列ベクトルによって定まる平行四辺形の符号をもった面積をも表す。このように，線形代数の内容には代数的理解と共に幾何的理解ができるものがある。本稿においては，線形代数の教材の幾何学的側面に注目し，平行性を用いて，すなわち，Hilbert による線分算および平面上の1点を通る直線と座標軸との交点を求める方法を用いて，2次の行列式および2次元数ベクトルの内積の幾何学的構成を行った。その結果をみると，平面上という特別な場合であるけれども，1点を通る直線の傾きが1，-1であることに対応して行列式，ベクトルの内積が同じ方法により構成できることは線形代数の教材の直感的理解に有効であると思われる。

本稿において，平行性に基づく幾何学的構成は（i）2点を通る直線をひく，（ii）直線外の与えられた1点を通って，この直線に平行な直線をひくという操作からなっている。コンピュータ・ディスプレイ上での作図において，これらの作図は容易に可能であろう。したがって，本稿での結果は，2次の行列式の値，2次元数ベクトルの内積，2元連立1次方程式の解法という限られた範囲ではあるけれども，コンピュータを用いた作図による線形代数の教材の直観的理解に有効であると思われる。

本研究は九州産業大学より共同研究として援助を受けました。感謝の意を表します。

引用文献

[1] 秋山献之・池田和興・渋谷謙一・田中正紀，わかりやすい線形代数，学術図書出版社，1991.

[2] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 9. Aufl., B.G. Teubner, Stuttgart, 1962.

[3] M. Koecher, Lineare Algebra und analytische Geometrie, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[4] 柳井　浩，数学の図解，共立出版，1983.

On Teaching Materials of the Linear Algebra

—— Geometric constructions of determinants of order two and inner products of two dimensional vectors by using parallelism ——

Ken-ichi SHIBUYA and Kiyosi YAMAGUTI

Faculty of International Studies of Culture, Kyushu Sangyo University

Abstract

This is a case study of teaching materials of the linear algebra. The linear algebra can be understood from two points of view, that is, algebraic and geometric.

Here, we consider two elementary topics of the linear algebra; the determinants of order two and the inner products of two dimensional number vectors. The purpose of this paper is to study the geometric constructions of these objects. A parallelism is used for these constructions, more precisely, we use the segments calculation by D. Hilbert and a parallel projection along the line $y=mx$ with slope m of a point to the x-axis or the y-axis.

The determinant and inner product are constructed corresponding to the slope $m=1$ and -1 respectively, since the determinant is alternative with respect to its columns and the inner product is symmetric bilinear form. As an application of the construction by using parallelism, we consider geometric constructions of the solution of the system of linear equations. It seems that the geometric construction by using parallelism is effective for intuitive understanding of the teaching materials stated above.