

複雑系の研究

——カオス辺縁におけるアトラクターの形態とその類型化——

〈カオス水車モデルの事例〉

井手口 敬

はじめに

1980年代に入ってポストモダニズムの思想が注目されるようになった。これは、近代科学が合理性や秩序を求めることに偏向し、非合理的なものや無秩序なものへの配慮に欠けていたことを批判するものである^{#1)}。

従来の科学が、均衡（平衡）状態に焦点を当ててシステムの運動を解明することに努力してきたのに対して、ニューサイエンス、中でも、「散逸構造理論」や「協同現象論」は、「ゆらぎ」や「混沌」から新たな秩序が形成される問題を扱っている。これらの理論では、「ゆらぎ」が自己強化されることで、新たな秩序が形成されると言うテーマに取り組んでいる。

社会科学においても「複雑性」のシステム論が登場し、線形系は本来的に自己組織的でないことが指摘されて以後、非線形と自己組織性の関係が注目されるようになった。

ブリゴジン＝ハーケン流の自己組織化パラダイム^{#2)}において、ランダム相からカオス相への相転移の過程に秩序相が介在することが指摘されて以後、カオスと自己組織化の関係について研究されるようになった。金子邦彦の指摘する「ホメオカオス」^{#3)}や吉田民人の「カオスの辺縁」^{#4)}などの領域が自己組織的挙動と関連付けられて研究されている。

本報告では、カオスの辺縁におけるアトラクターの形態的分類を通して、カオスの意味について考察してみたい。

I. カオス水車の概容

本論では、科学シミュレーション研究会のメンバーである内藤正美氏が作成されたカオス水車のプログラムを使用して、カオス水車の運動が描き出す様々なアトラクターの類型化を試みます。これらのアトラクターが描く空間構造から複雑系の特色を読

み取って欲しいと思います。

最初に、シミュレーションに使用するCGの水車^{#5)}について説明します。

図1は、カオス水車の運動方程式を示しています。水車の直径は8cm、重さが40gです。

$$\frac{dx_j}{dt} = w_j, \quad (j=1, 2: \text{水車の番号}) \quad (1)$$

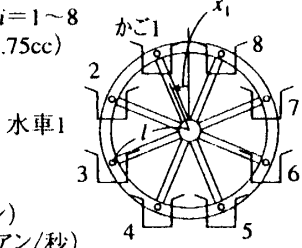
$$\frac{dw_1}{dt} = \frac{gl \sum_{i=1}^8 m_1(i) \sin x_1(i) - k_1 I_f w_1 - k_r I_f (w_1 - w_2)}{I_f + I^2 \sum_{i=1}^8 m_1(i)} \quad (2)$$

$$\frac{dw_2}{dt} = \frac{gl \sum_{i=1}^8 m_2(i) \sin x_2(i) - k_2 I_f w_2 - k_r I_f (w_2 - w_1)}{I_f + I^2 \sum_{i=1}^8 m_2(i)} \quad (3)$$

$$\frac{dm_j(i)}{dt} = \begin{cases} p_j - a_j \sqrt{m_j(i)} & ; i \text{ 番目のかごに注水中} \\ -a_j \sqrt{m_j(i)} & ; \text{注水していないとき} \end{cases} \quad (4)$$

ただし、 $0 \leq m_j(i) \leq M$, $j=1 \sim 2$, $i=1 \sim 8$
 M は、かごが満杯のときの水量(6.75cc)

以上の式で、



x_j : j 番目の水車の回転角(ラジアン)
 w_j : j 番目の水車の回転速度(ラジアン/秒)
 $m_j(i)$: j 番目の水車の i 番目のかごの水量(水の質量)
 (0~6.75cc)
 $x_j(i) = x_j + \frac{\pi}{4} (i-1)$: j 番目の水車の i 番目のかごの角度
 g : 重力加速度(980cm/秒²=9.8m/秒²)
 l : 水車の半径(4cm)
 I_f : 空の水車の慣性モーメント(40I² グラムcm²)
 k_1 : 水車1(1番目の水車)の、回転の減衰率(0~20/秒)
 k_2 : 水車2(2番目の水車)の、回転の減衰率(0~20/秒)
 $k_r = \begin{cases} k_c \text{ (水車間の結合の強さ)}; \text{水車をつないだとき} (1 \sim 150/\text{秒}) \\ 0; \text{水車を切り離れたとき} \end{cases}$
 p_j : j 番目の水車の注水量(0~40cc/秒)
 $a_j = \sqrt{\frac{2g}{S} \frac{\pi}{4} d_j^2}$
 ただし、 d_j : j 番目の水車のかごの穴の直径(0~10mm)
 S : かごの床面積(4.5cm²)

図1 水車の運動方程式

図2は、モデル水車の立体構造を示したものです^{#6)}。

このバケツは、深さ、幅とも1.5cm、奥行き3cmで、6.75ccの水が入ると満杯になります。

図3は、水車の運動に関するCG上の画像データを示したものです。

図4は、回転する水車の画像部分です。毎秒5ccの注水量、diam(=かごの穴の直

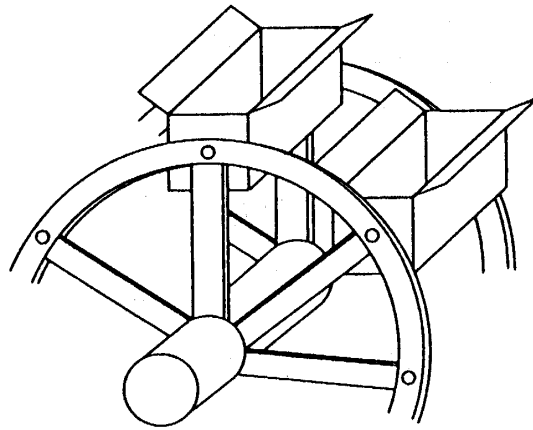


図2 モデル水車の立体構造

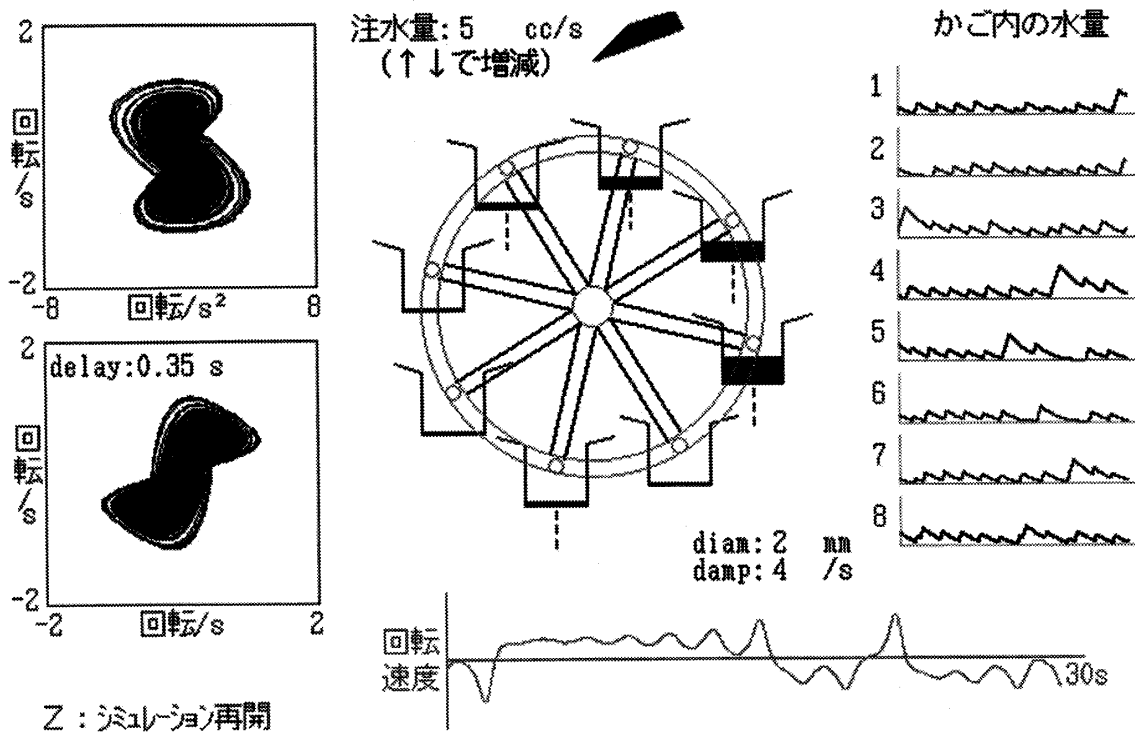


図3 カオス水車のCG

径)は2 mm, damp (=水車の減衰率)は4で運動していることを示しています^{#7)}。

図3の中の回転速度の部分を抜き出したものが図5です。この図は、カオス水車の回転速度の30秒間分の変化を示したものです。30秒経過すると画面が消え、次の30秒分の変化が現れます。この図は、波形が上部にあるときは左回り、下部にあるときは右回りの状態にあることを表しています。

図5の30秒間の速度の変化は、この水車が、右に1回転した後、左に6回転、右に2回転、左に1回転、更に右に3回転し4回転目に入っていることを示しています。

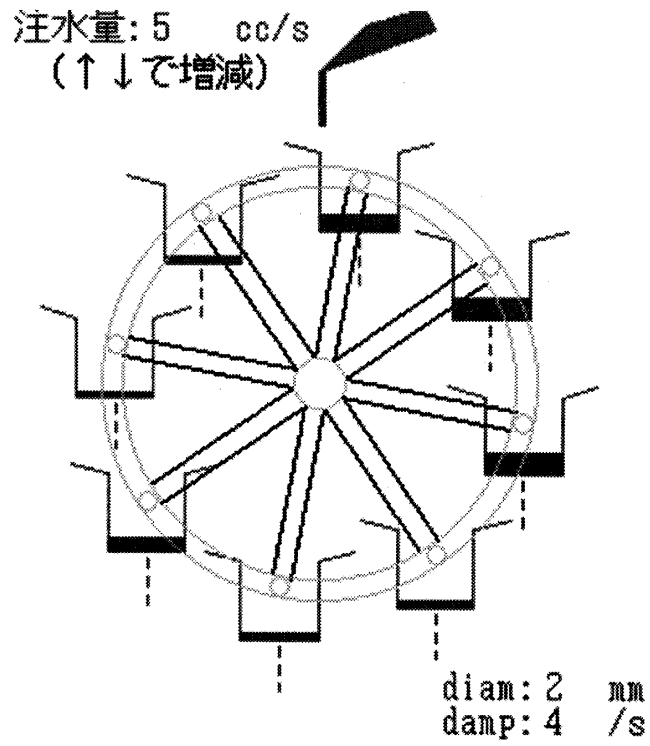


図4 水車部分の画像

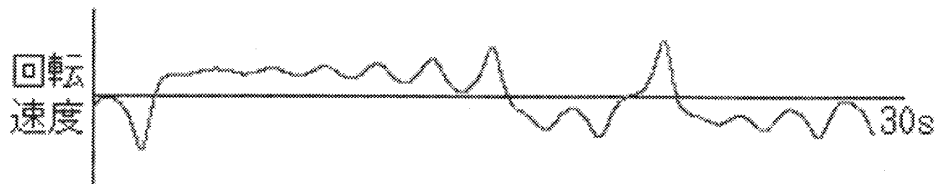


図5 回転速度の変化の画像

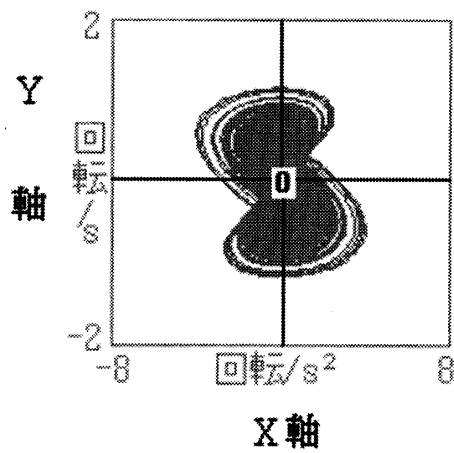


図6 アトラクターの画像

図6は、水車の回転速度の変化を、X軸に回転の加速度、Y軸に回転速度をとって、加速度と速度の関係で表したものです。上半分は左回転、下半分は右回転の運動の変化に対応しています。この図の中心「0」は、アトラクター^{#8)}がこの点に収斂する運動では、最終的に停止状態になることを示しています。

この図のアトラクターが、概ね8の字型であり、その内側がすっかり埋め尽くされていることから、この水車は、この段階までに回転運動、振動運動、さらにこれらの複合的運動など複雑な運動をしてきたことが分かります。換言すれば、このカオス水車が複雑な運動をすることによって、この8の字型の内部に含まれるすべての値をこのカオス水車の運動は辿ってきたのです。このカオス水車が加速度と速度の関係によって描くアトラクターは、エルゴード過程^{#9)}を示していることが読み取れます。

一見複雑にみえるこのカオス水車の運動は、ある特定の視点、すなわち、運動の加速度と速度の関係から見ると、大域的には特定の範囲内での動き（＝一定のアトラクター内部に限定）であり、反面、小域的には前述の特定の範囲内で極めて乱雑な運動（アトラクター内部の値を満遍なく取る）という二面性を内包していると言えられます。この二面性は、複雑系の自己組織化過程において、外部に対する強靱性と内部における多様性を生み出す要因となります。

図7は、8個のかごの水量の30秒間分の変化を示しています。かご中の水量の変化が一定、あるいは、一定のパターンを示している場合は、ある種の規則的な運動が進

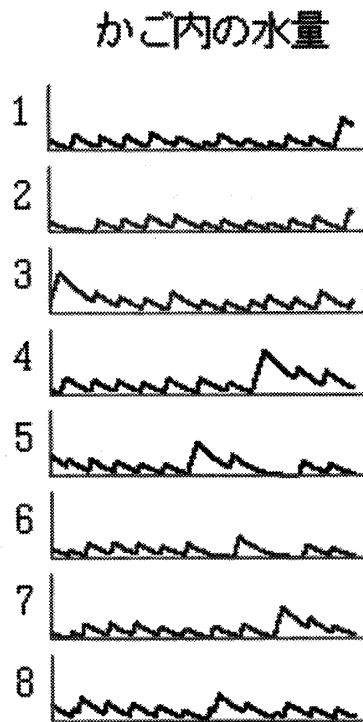


図7 各かごの水量変化の画像

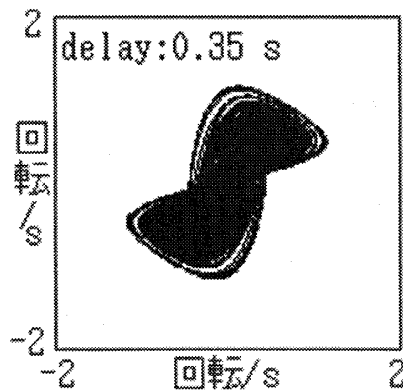


図8 「delay 0.35」のアトラクターの画像

行していることを表します。この図の場合、これらのかごの水量分布が一定のパターンを示していないことから、この水車の運動が複雑であることが読み取れます。

図8は、ある時点における回転速度とその0.35秒後の速度との関係を表したものです。このアトラクターは、前述した図6の回転の加速度と速度との関係から得られたアトラクターと極めて類似した形態を示しています。

ちなみに、この時間的ずれを0.35秒から0.7秒に変えると、回転速度の変化は、下記の図9のように表されます。同じ運動でも時間のずれの程度を変えてみると、まったく異なったアトラクターの形態が形成されているのが分かります。

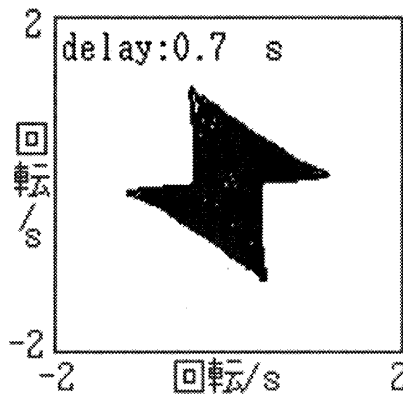


図9 「delay 0.7」のアトラクターの画像

このアトラクター再構成の遅延時間の画像に関する詳細な検討については、別の機会に報告したいと思います。

以上が、カオス水車のCGの概容とその読み方についての説明です。

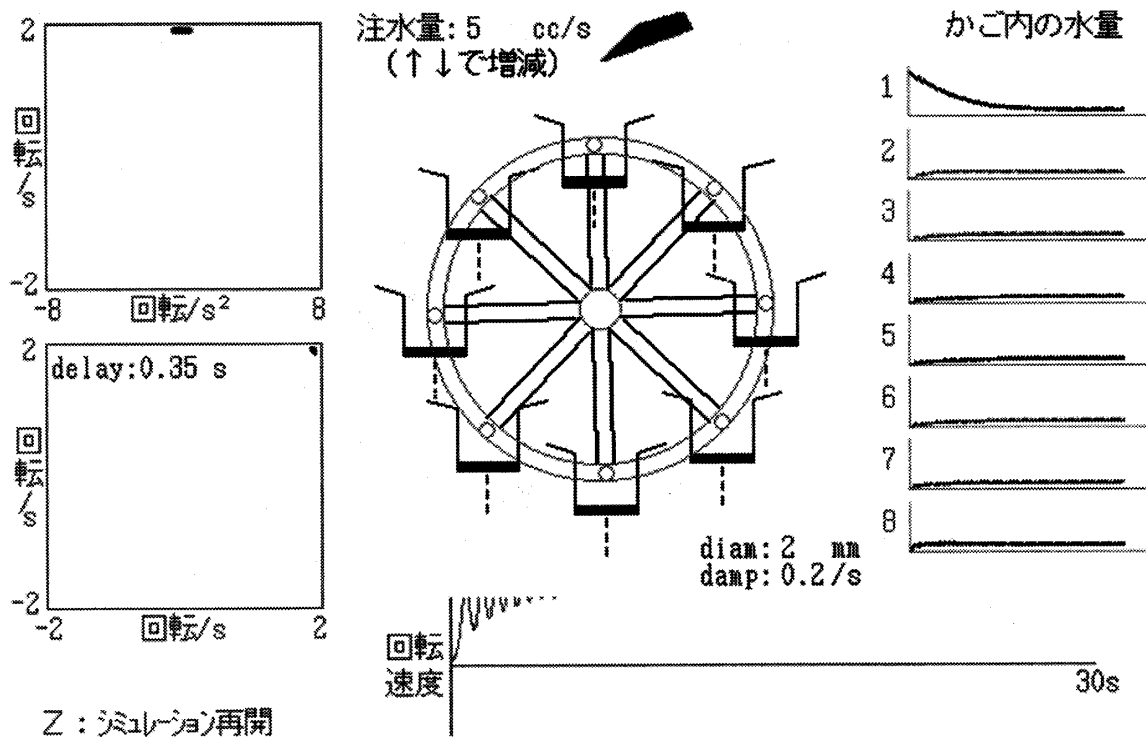


図10 水車の画像資料 (注水量 = 5, かごの穴の直径 = 2, 減衰率 = 0.2)

II. カオスの周辺の水車の運動

次に、このカオス水車のソフトを用いて、カオス周辺のアトラクターの変化について考察したいと思います。

前述したように、この水車は、注水量毎秒 5 cc, かごの穴の直径 2 mm, 減衰率 4 の値でカオス運動を見せます。ここでは、この水車を、注水量と穴の直径を前述のカオス運動の場合と同じ毎秒 5 cc, 2 mm とし、減衰率だけ変えて、その値を 0.2 と極めて小さくして見ます。

その結果を示したのが図10です。この図は、この水車が毎秒 2 回転以上の高速で回転していることを示しています。注水量, 穴の直径, 減衰率がそれぞれ 5, 2, 0.2 の値では、この水車は一方向にしか回転しないのです。すなわち、きわめて単純な運動しかしないということが分かります。

次に、注水量と減衰率を図3と同じにして、かごの穴の直径を 0.1mm 程度に小さくして見ましょう。

すると今度は、図11の状態、水車は理論上 10分以上も停止したままになってしまいました。

すなわち、穴の直径が小さく、従って漏れる水量が少ないとこれまた水車の運動は

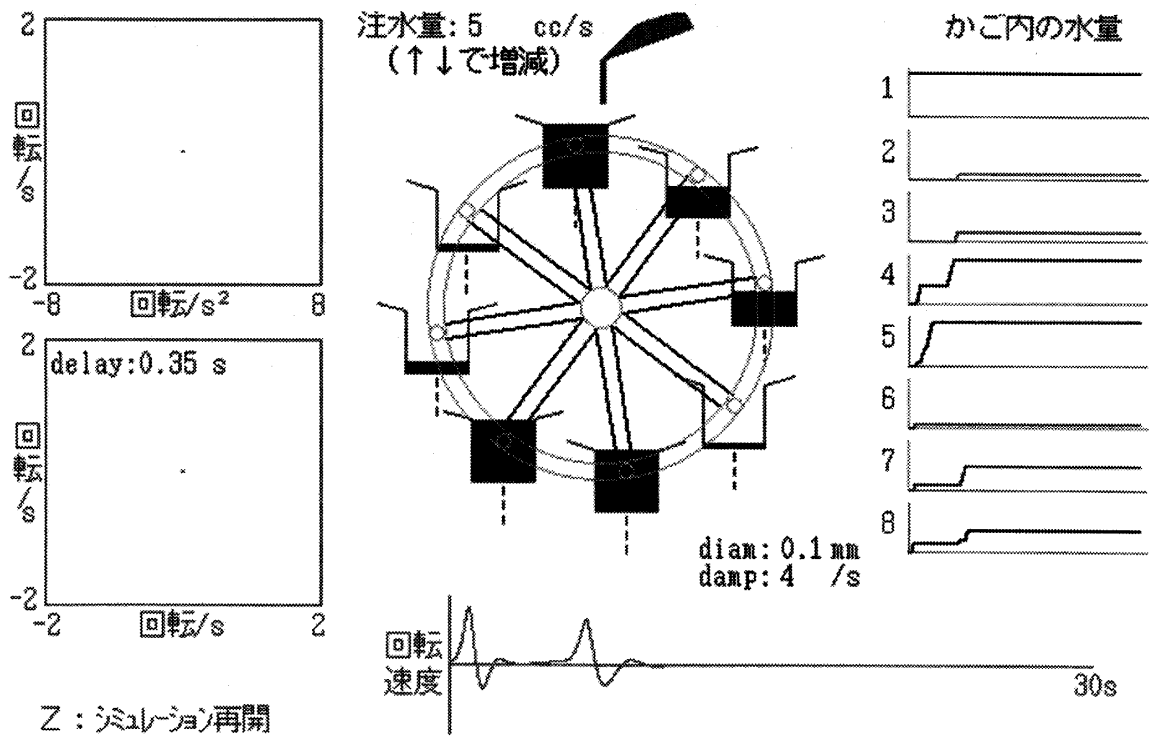


図11 水車の画像資料 (注水量 = 5, かごの穴の直径 = 0.1, 減衰率 = 4)

単純になってしまうことが分かります。極端な場合、かごに穴が開いていなければ、やがてすべてのかごは水で満たされ、減衰力によって水車は次第に回転力を失い、やがて止まってしまうのです。

これらのことから、複雑な運動の背後では、摩擦や漏れが重要な役割を果たしていることが分かります。さらに注意深く水車の運動を観察していると、この複雑なカオス水車の運動は、連続的に注水される水を8つのかごで不連続に受け取っていることや、中心角30度ごとに8つのかごが配列されていることが重要な意味を持っていることが分かります。もし、かごの数が多くなると、極端な場合、無限にかごが配列されているとすると、それはすべてのかごが繋がっているようなものですから、複雑な運動を起こすことは出来ないのです。

さらにもう一つ、この水で満たされたかごは、この図の左半分では、左回転の運動を引き起こしますが、真下に降りた後、右半分の位置では、逆に右回転の運動を引き起こすように作用するのです。これは重力によって引き起こされることであり、重力が重要な働きをしていることも読み取ることが出来ます。

この様に、複雑な運動の背後には、重力や連続的なエネルギーの供給に不連続性を生み出す仕組み(=回転運動に変換する)、さらに、前述したように、効率性を追求すると不要とみなされ易い、システム内部のエネルギーの漏れや摩擦が重要な役割を果

たしていることが読み取れます。

III. アトラクターの類型

従来、システム研究は線形モデルを中心として進められてきましたが、複雑系の研究では非線形性が問題となります。ここでは、非線形性の空間像をカオス水車の描くアトラクターのパターン配列を通して表現したいと思います。

カオス的運動を示すアトラクターは、図12に見られるように、図中の注水量毎秒5cc, かごの穴の直径2mm, 減衰率4のところ限定されています。注水量が0であることを表す左側の立面は水車の停止(以後、図中の記号=B)の面であり、注水量が毎秒10cc以下の空間では、穴の直径が6mm, 或いはそれ以上に位置する上部の天井面は停止の空間や面を構成します。また、減衰率が0であることを表す前面の立面は回転運動(以後、図中の記号=T)の面となっています。

これに比して、注水量が毎秒10ccであることを表す右側立面には、停止, 回転運動, 不規則な振動運動(以後、図中の記号=S)など様々なタイプのアトラクターが含まれ

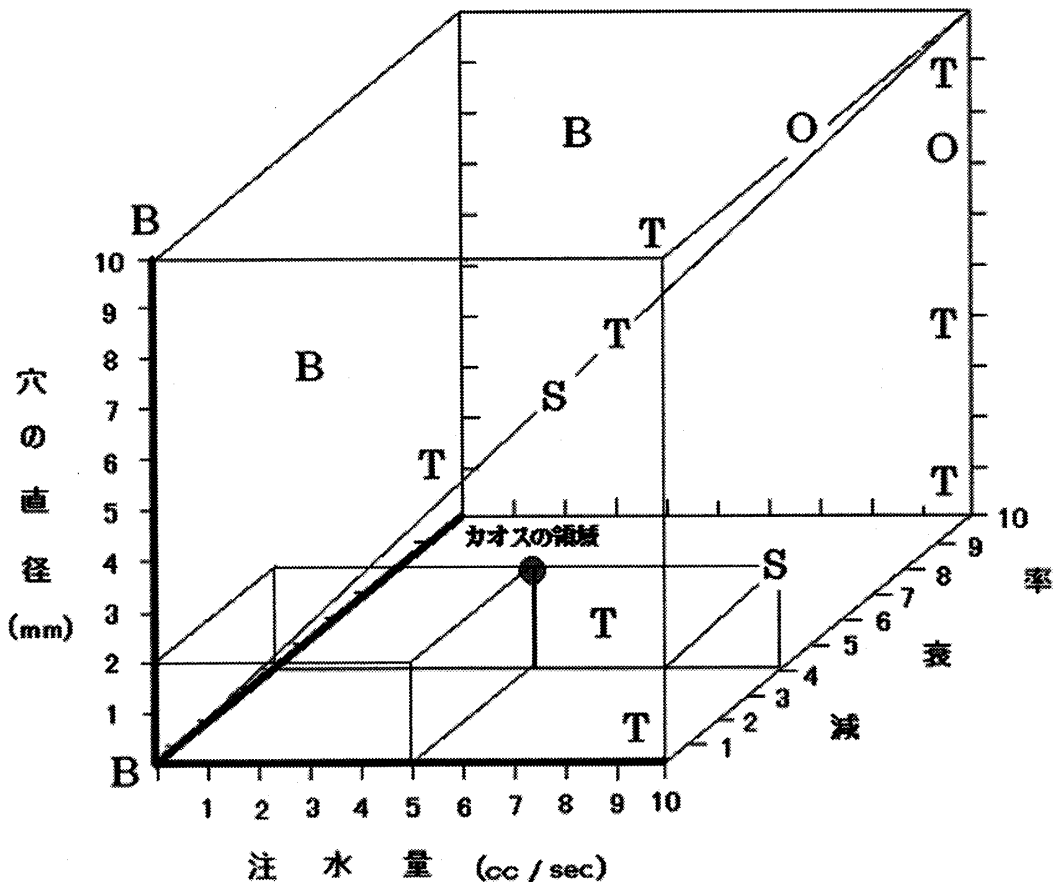


図12 10*10*10空間『初速0.1』におけるカオス運動の位置とアトラクターのタイプ

しており、この面におけるアトラクターの多様性は、図の右・外側に向かってさらに広く展開されていることを示唆しています。

なお、注水量、かごの穴の直径、減衰率の数値が10以上の座標部分については、別の機会に報告したいと思います。

ここでは、カオス的アトラクターを示す注水量(=X)、かごの穴の直径(=Y)、減衰率(=Z)が、(5, 4, 2)の周辺部の空間構造について少し詳しく見ていくことにします。

カオス水車の描くアトラクターは、運動形態によっていくつかのタイプに分類することができます。

第1のグループは回転運動を示すものです。この運動は、図の上部、或いは下部に限定されたO字型のアトラクターを形成します。

図13は、回転運動のアトラクターの3つの事例を示しています。

第2は振動運動のアトラクターに関するものです。図14は、振動運動のアトラクターを示したものです。図の表現上、アトラクターは図の上部と下部とに跨った対称形となっています。

振動運動の亜種として、振動形態に回転運動が組み込まれたものや、「ゆらぎ」の増大をもたらすカオス性が増大したものなどがあります。

この場合、振動運動のアトラクターが「ゆらぎ」を持った形、すなわち、振動系のアトラクターの幅がより太く表されます(=図15の「Sc」)。

これに対して、同図の下の2つ(=「St」)は、図の中心部で交差するアトラクターになっていますが、これは、何回かの左回転の後、右回転、さらに左回転に戻るという運動が主体をなす運動形態を示しています。

第3はカオス運動に関するものです(=図16)。カオス的運動の中にも回転運動が卓越化するもの(=「Ct」)、振動運動が卓越するもの(=「Cs」)、さらに、回転運動と

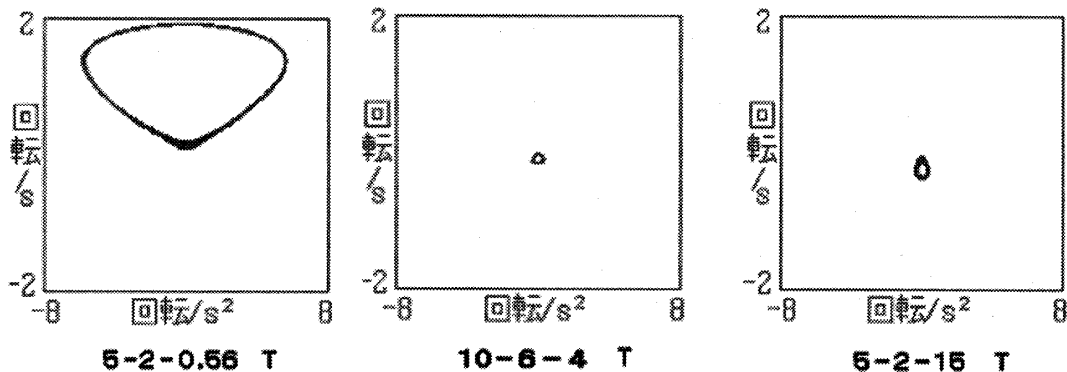


図13 回転運動のアトラクターの類型

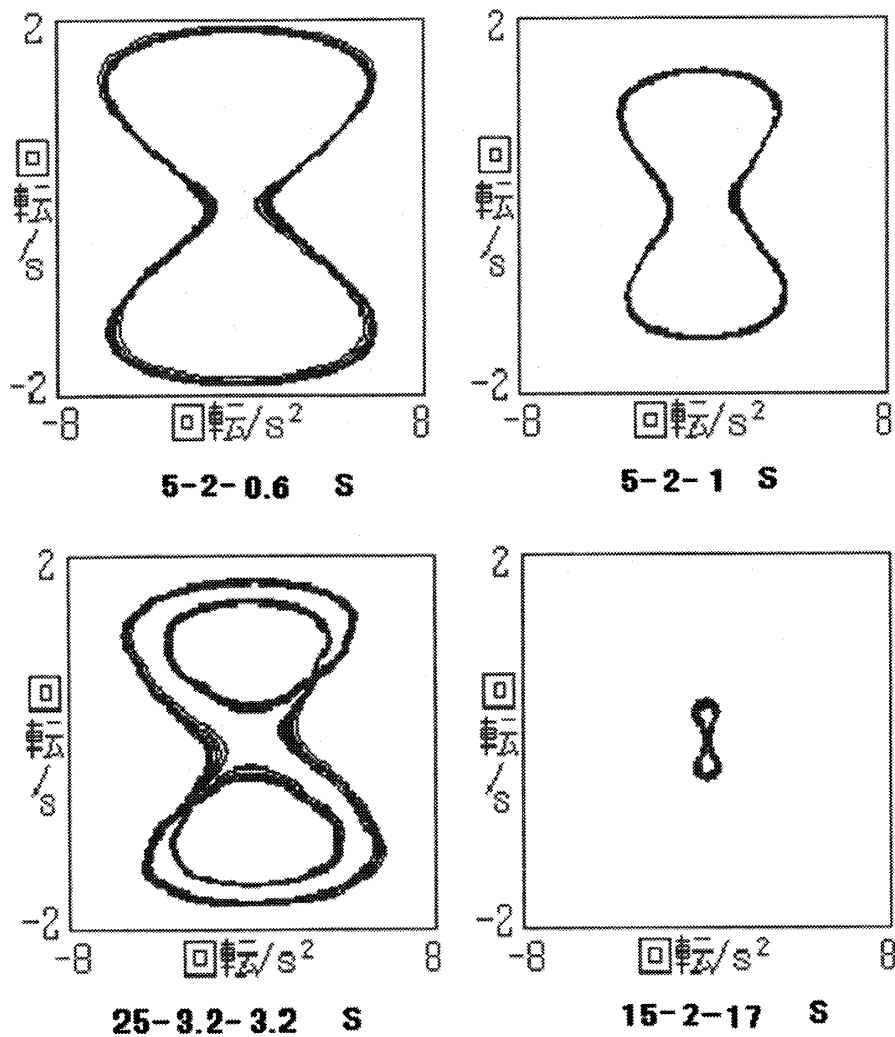


図14 振動運動のアトラクターの類型

振動運動が複合するもの (=「Cst」), 加えて, 比較的エルゴード性の低い, 別の表現を用いれば, 秩序性が高いもの (=「Co」) に分類することが出来そうです。

「C」と「Ct」, 「Cs」との違いは, 「C」にはアトラクターの内部に明瞭な空隙が存在しないのに対して, 「Ct」や「Cs」では, その内部に空隙部分が存在する点にあります。

次に, 「Ct」と「Cs」の違いについては, 「Cs」が図の上下にエルゴード性を欠く空隙が認められるのに対して, 「Ct」はどちらか一方にしかこの空隙が存在しないことです。これによって両者を区別することができます。「Cst」については, 上下に空隙が認められるものの, その大きさが極めて小さく, 運動の過程を詳細に見ていくと「Cs」と「Ct」の双方の性質が認められることから, このアトラクターを「Cs」, 「Ct」から区別しました。

また, 「Co」については, 結果的には, 「C」と類似した形態を示すものの, この場

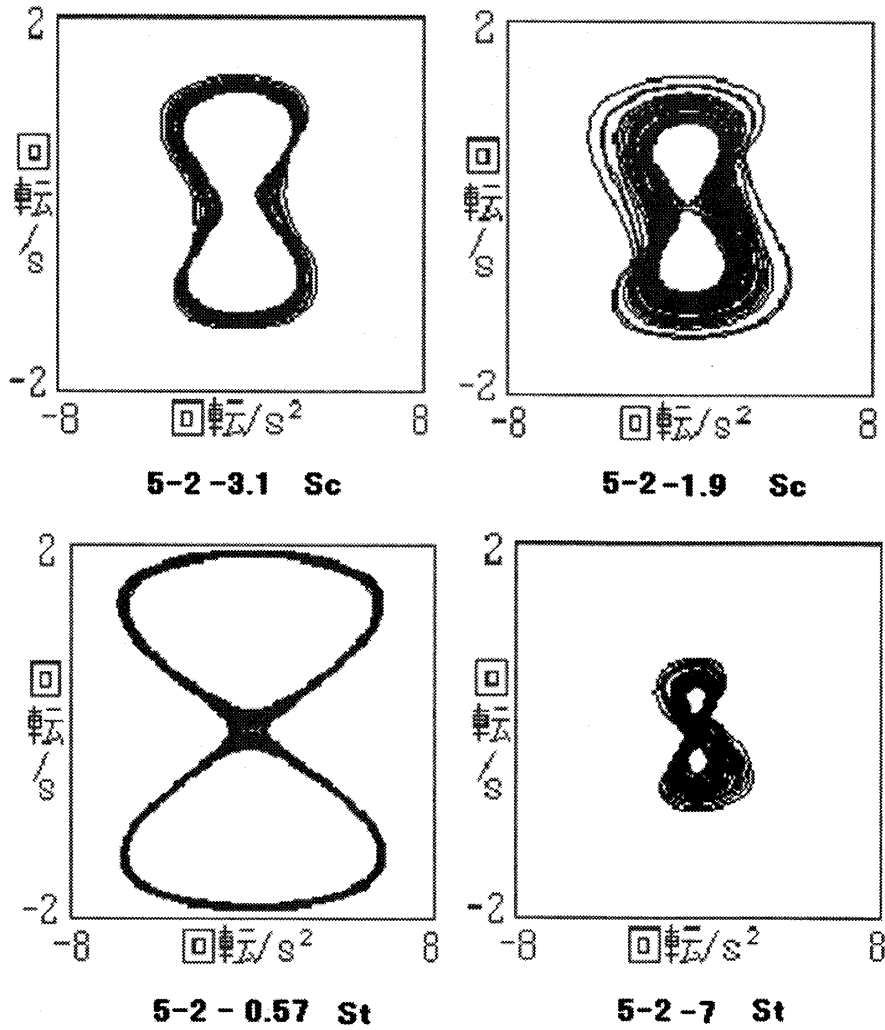


図15 振動運動のアトラクターの亜種

合、アトラクターの大きさが「C」よりも小さく、その過程を詳細に観察すると、「C」と比較してエルゴード性が弱く、途中経過の図に明瞭に認められるように、玉ねぎの皮のように飛び地的な値をとることから「C」と区別したものです。

これらのことから、カオス運動は、回転運動や振動運動が複合化した、ある意味では、秩序の集合体とみなすことが出来そうです。この点が、ランダム現象とカオス現象の一つの違いと言えそうです。

次に、アトラクターの変化を大域的に把握して見たいと思います。カオス周辺のアトラクターを注水量に沿って見ていくと、基本的には、停止—振動運動—回転運動—カオス運動へと転移していきます。穴の直径の軸に沿っても、停止—回転運動—振動運動—カオス運動—回転運動—停止へと転移していきます。これに対して、減衰率の軸に沿っては、回転運動—振動運動—カオス運動—振動運動—回転運動—振動運動へと前二者と比較すると多様な転移相を示します。

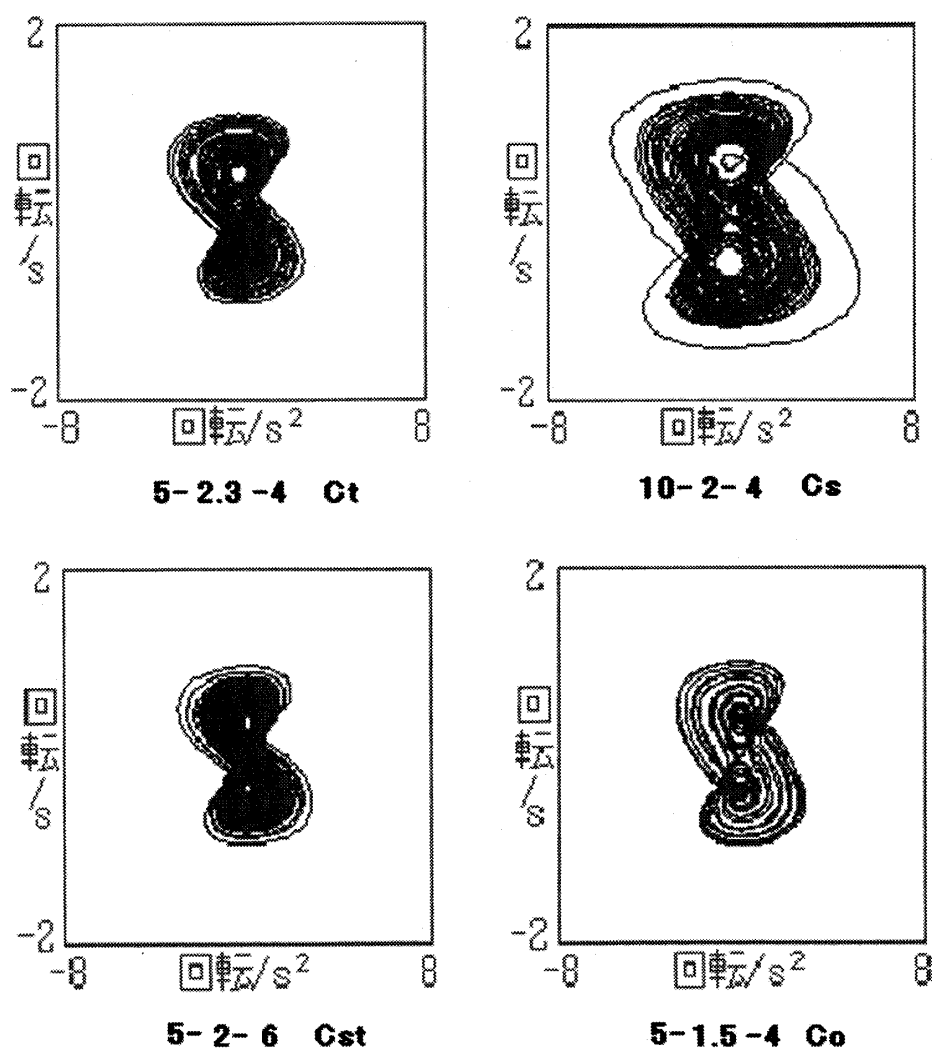


図16 カオス的アトラクターの類型

減衰率に関しては、「0」の値では回転運動、「20」の値では振動運動になるので、注水量毎秒5 cc、穴の直径2 mmと言うエネルギー水準の世界では、減衰率の大小で水車を停止させることは極めて困難であることを示しています。

このカオス水車のソフトでは、減衰率が「20」以上の値をとることが出来ませんが、減衰率がもう少し大きくなると振動運動が回転運動に転移することが予測できます。

穴の直径の軸に沿っては、極めて限られた領域で運動形態が微妙に変化するのに比して、注水量の軸に沿っては極めて緩慢な変化が見られることは興味深いことです。この点、減衰率の軸に沿って見られるアトラクターの変化は、注水量と穴の直径 (= 漏水量) の中間的な性格を示していると言うことが出来そうです。

ただし、減衰率5以下の空間において、微妙な変化が認められることは興味深いことです。

なお、注水量の軸に関しては、毎秒0.1cc以下の極めて小さな値において局地的に秩序的振動運動領域が見られます。注水量毎秒1cc、かごの穴の直径1mm、減衰率1以下の小さな空間にも副次的なカオス的空間領域がありそうです。図17を参照してください。

なお、穴の直径の軸については、極めて限られた値の中でアトラクターが大きく転移していくという特徴が見られましたが、これは、漏れる水の量を制御することはそれほど大きなエネルギーを必要としないので、この様なシステムを制御しようとする場合、漏れる水の量を制御することが効果的であるということの意味しているのでしょうか。

換言すれば、重力を利用することで、比較的小さなエネルギーでシステムを制御できる可能性を示しているのでしょうか？

次に、図18はアトラクターを類型化したものを10*10*10の立体の中に描写したものです。

カオス・アトラクターを中心として、注水量、穴の直径、減衰率を少しずつ変化させながらアトラクターの形態の特色を分類し、配列したものです。

線形性の空間と異なる非線形性 (= 複雑系) の空間像の一端でもイメージしてもら

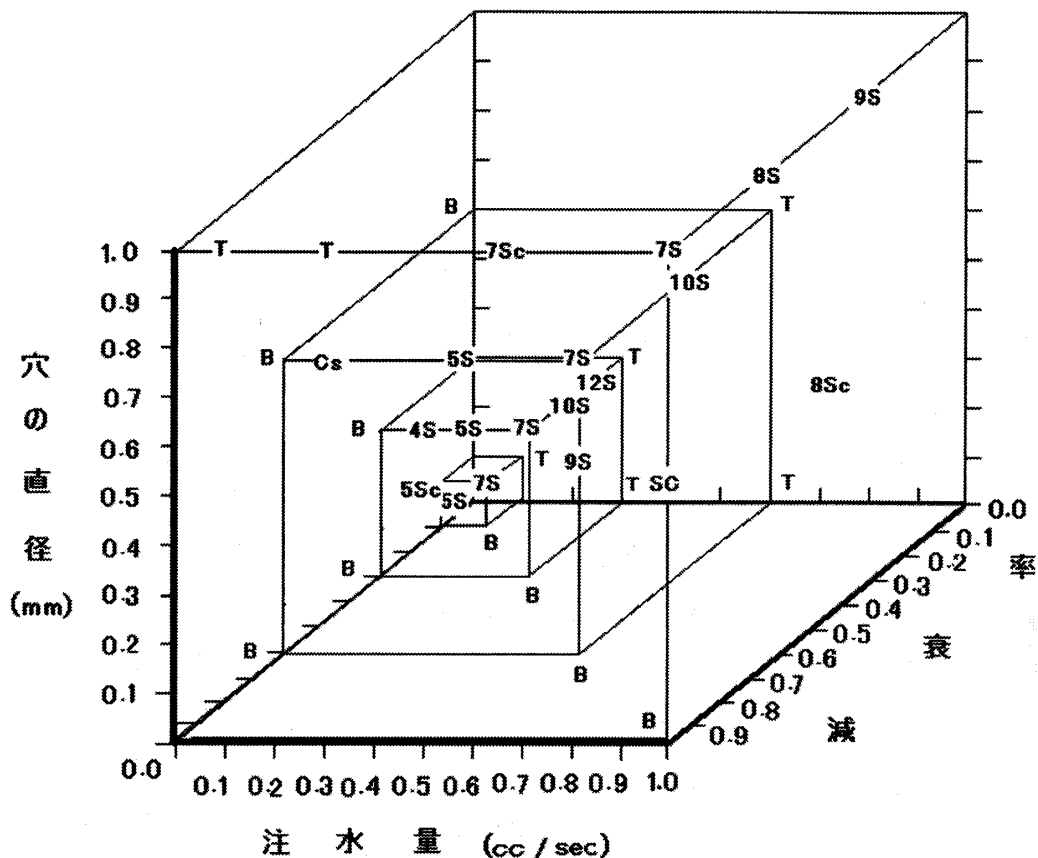


図17 1.0*1.0*1.0空間『初速0.1』におけるアトラクターのタイプ

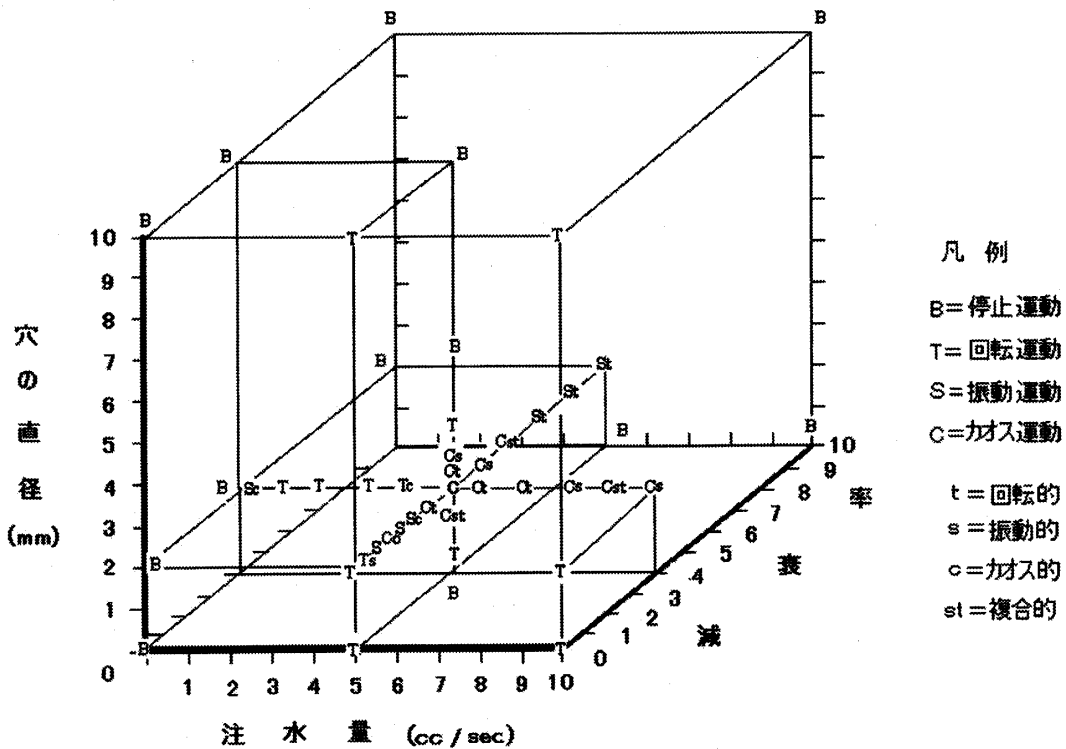


図18 複雑系の空間像

えれば幸いです。

なお、より詳細なアトラクターの進化の問題と大域的な構造を生み出す「ゆらぎ」の創発性の問題については、別の機会に報告したいと思います。

まとめにかえて

本報告では水車のCGを用いて、水車が見せるカオス運動周辺のアトラクターの形態について類型化を試みた。以下簡単に要約してみたい。

- 1) この水車は、注水量毎秒 5 cc, かごの穴の直径 2 mm, 減衰率 4 という極めて限られた領域でカオス的運動形態を示した。このカオス領域は、停止, 回転運動, 振動運動の空間に閉じ込められた, 謂わば, 特異点をなしている^{#10)}。

これは、地球表面における現在の重力, 温度, 気圧の極めて限られた水準において豊かな生命空間が広がっていることと対応するものであろうか?

- 2) このカオス運動を生み出す特異点は、注水量と漏水量, さらに水車の回転の減衰率がお互いに微妙な相互作用を及ぼす領域でもある。例えば、注水量の多さは、個別のかごに関しては、漏水量の機能を相対的に減少させると共に、水車の回転力を増大させて減衰率を機能的に低下させる。

また、回転速度が増加した水車は、高速領域では、8つのかごの水量分布の偏りをなくし、結果として回転速度の低下をもたらす。反面、低速領域では、個別のかごについての長時間の注水が8つのかごの水量分布の偏りを大きなものとし、結果として回転速度の上昇をもたらすのである。

3) この水車が速度(=X軸)と加速度(=Y軸)との関係において描くアトラクターは、回転型(=T)、振動型(=S)とカオス型(=C)の大きく三タイプに分類できる^{#11)}。

さらに、これらの中間型として振動型に大きなゆらぎを見せるSc型、振動型に回転型が加わったSt型、カオス型(=C)に回転型が卓越するCt型、カオス型に振動型が卓越するCs型、さらに、カオス型でありながらエルゴード性の弱いCo型、カオス型でありながら回転型と振動型が比較的明瞭に分化したCst型が挙げられる。

カオス型を取り囲むこれら中間型の分布形態から見ると、カオス運動は様々な回転型や振動型の複合体に、高度なエルゴード性を内包する秩序の集合体であることを推測させる。このことは、カオスがすべての存在様式の根源であるとみなされることに通ずるのであろうか^{#12)}。

4) 最後に、図18を参照しながら、カオス水車が描くアトラクターの回転運動と振動運動が織り成す非線形の空間像をより詳細にイメージしてもらえれば幸いである。

注

注1) 複雑系による科学革命(1997) J. キャステイ, 講談社

注2) 混沌からの秩序(1993) I. プリゴジン, みみず書房

注3) 多様性を生み出すカオス(1994) 金子邦彦, 日経サイエンス

注4) 自己組織化(1995) 吉田民人, ミネルバ書房

注5) 複雑系・カオス・量子(1997) 科学シミュレーション研究会 p.40

注6) (前掲 p.39)

注7) 減衰率が4であると言うことは、4分の1秒で回転速度がはじめの約2.7分の1遅くなることを意味します。2.718...と言う数はオイラー定数と呼ばれる定数で、振動現象や回転現象の計算ではよく現れるものです。減衰率が大きいほど、抵抗が大きくてすぐに水車の回転が遅くなることを意味します。

注8) 例えば、鮫の数(=X軸)とその餌となるエビの数(=Y軸)との関係を見ると、この関係はある領域に引き込まれていくことが考えられます。図6に見られるように、大域的にはある種の平衡状態を保ちながらも、その領域を詳細に見ると、換言すれば、小域的にはカオス的な動きを示します。これがアトラクターと呼ばれるものです。

注9) エルゴード過程とは、時間をかければ、特定の範囲内のすべての値を取る過程ということです。

注10) 図12参照

注11) 図13, 図14, 図15参照

注12) 図16参照

参考文献

- 複雑系による科学革命 (1997) J. キャステイ, 講談社
混沌からの秩序 (1993) I. プリゴジン, みみず書房
多様性を生み出すカオス (1994) 金子邦彦, 日経サイエンス
自己組織化 (1995) 吉田民人, ミネルバ書房
混沌の力 (1994) 今田高俊, 講談社
複雑系・カオス・量子 (1997) 科学シミュレーション研究会, BLUE BACKS
カオスの素顔 (1991) N. ホール, BLUE BACKS
複雑系を解く確率モデル (1997) 香取真理, BLUE BACKS