

パーコレーション・モデルによる情報伝達の研究 I —— サイト過程とボンド過程で形成される情報伝達網 ——

鎌倉 史郎[†]・李 鋼[‡]

はじめに

社会の中で何かを移動させるということは、いつの時代でも重要な行為である。古い時代では、物の移動が最も重要であった。やがて、その重要性はエネルギーの移動に移った。そして、現在では、情報の移動 (= 情報伝達) が社会の重大関心事となっている。

近年、コンピュータなどの科学技術の発展にともなって、個人間の情報伝達の方法に大きな変化が起きている。Web情報の取得、電子メールの普及である。電子メールは、ほぼ瞬時に伝わること、相手の都合を考えずに何時でも発信できること、費用が安いこと、などのために、盛んに利用されるようになった。電子メールによる個人間情報伝達の特徴は、距離によって費用がほとんど変わらないことのため、情報伝達を行う二人の個人間の距離にほとんど依存しない事である。将来における個人間の情報伝達においては、会話や電話などによる情報伝達が主要なものであることには変わらないが、電子メールの占める割合は、今後ますます多くなっていくと予想される。

著者たちはこのような状況に関心をもち、個人間情報伝達のコンピュータ・シミュレーションを行った。シミュレーションでは、つながりを調べるのに使用されるパーコレーション・モデルを使い、どのような情報伝達網をどれくらいの密度で形成すれば、その情報伝達網に伝えられた情報が社会全体に広がるか、その時の情報網の状況はどうなっているか、等について調べた。

1. シミュレーションで使ったパーコレーション・モデル

パーコレーション・モデルは、まず、空間を格子に分割する。二次元の場合には、図1に示すような正方格子、三角格子、蜂の巣格子などが使用される。

[†]九州産業大学国際文化学部 メール：kamakura@ip.kyusan-u.ac.jp

[‡]九州産業大学国際文化学部研究生 メール：lg20001116@hotmail.com

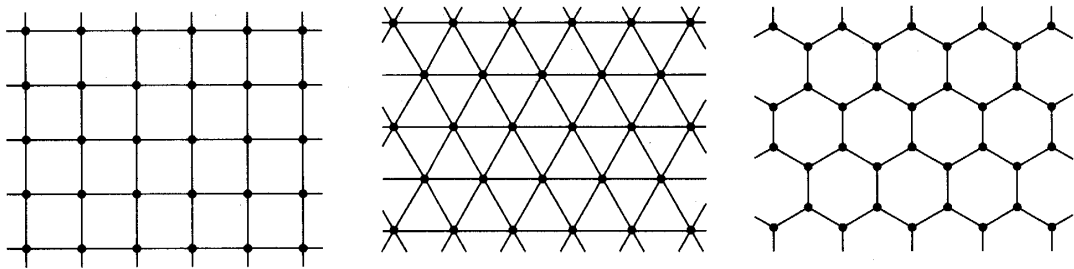


図1 正方格子，三角格子，蜂の巣格子

正方格子が， L 本の横線と L 本の縦線で構成されているとすると，その格子点の数は L^2 個である。格子点と格子点を結ぶ線の本数は $2L(L-1)$ 本である。シミュレーションでは， $L=100$ の正方格子を使用した。

次に，注目する格子点と他の格子点のつながりをどのように設定するかを考えよう。正方格子の場合には，注目する格子点に最も近い格子点（第一近接格子点）は4個である。二番目に近い格子点（第二近接格子点）も4個である。以下の図2と表1は，正方格子における第 n 近接格子点（ $n=1\sim 4$ ）とその数を示している。

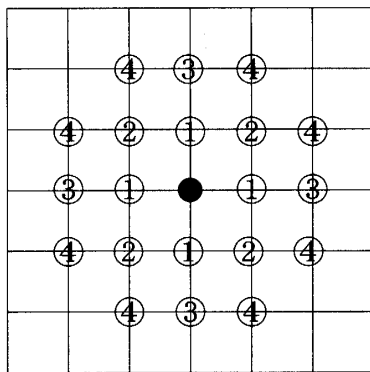


図2 第 n 近接格子点

表1 第 n 近接格子点の数

n	第 n 近接格子点数	配位数 z
1	4	4
2	4	8
3	4	12
4	8	20

格子点のつながりは，普通，第 n 近接格子点（ n に正整数値を与える）までの格子点とつながりを持つとして扱われる。第 $1\sim n$ 近接格子点までの格子点数の累計は配位数 z と呼ばれる。この論文では， $n=4$ ， $z=4$ の場合，すなわち，一つの格子点はその上下左右の四つの格子点（以下，ノイマン近傍と呼ぶ）とつながりを持つことが出来る場合を扱う。

[サイト過程]

ある確率 p_{site} で格子点(サイト)に印を付ける。印を付けられた格子点は，占有サイトと呼ぶことにする。囲碁に例えるならば，正方格子は碁盤，占有サイトは黒石，占

有サイトでないサイトは白石（白石も黒石も置かれていないところと考えても良いが、説明の都合上、白石があるとする）となる。つながりをノイマン近傍とした場合、ある一つの占有サイトに注目したとき、その上下左右に占有サイトがあれば、二つの占有サイトは「つながっている」とする。これも囲碁のルールと同じである。互いにつながっている占有サイトの塊をクラスターと呼ぶ。つながっている二つの占有サイトを結ぶ線を占有ボンドと呼ぶ。これは次に述べるボンド過程との対応を付けるためである。

p_{site} を 0 から 1 まで増やしていくと、最初は占有サイトの数は少なく、またクラスターも小さなものしか存在しない。 p_{site} がある程度大きくなると、大きなクラスターと小さなクラスターが出現するようになる。やがて、正方格子の端から端（左端から右端、かつ上端から下端）までつながるクラスター（浸透クラスターと呼ばれる）が出現し、 p_{site} が 1 になると一つのクラスターが正方格子を覆うことになる。ある p_{site} の状態では、大小さまざまな大きさのクラスターがいくつも存在するが、この中で最大のものを最大クラスターと呼ぶ。浸透クラスターはほとんどの場合、最大クラスターであるが、非常に小さい確率でそうでないことが起こる。しかしながら、シミュレーションを多数回繰り返せば、この確率は無視することが出来る。

p_{site} がどれくらいの大きさになると、浸透クラスターが出来始めるのであろうか。この値は、サイト過程の浸透閾値と呼ばれ、格子の種類、配位数、格子の大きさによって異なる。正方格子でノイマン近傍の場合は、 L が十分大きければ（正確には $L = \infty$ で）0.5927 であることが分かっている。

このように、ある確率でサイトを占有サイトに置き換えてクラスターを形成していく過程をサイト過程と呼ぶ。図 3 はサイト過程におけるある状態を示すものである。

[ボンド過程]

次に、ボンド過程と呼ばれる別種のクラスターの形成方法を考えよう。つながりを持つ二つの格子点を結ぶ線（ボンド）にある確率 p_{bond} で印を付ける。印を付けられたボンドは、占有ボンドと呼ぶことにする。また、占有ボンドの両端のサイトは占有サイトとすると、サイト過程の場合と同じように、クラスター、浸透クラスター、最大クラスター、浸透閾値が定義される。

ボンド過程の浸透閾値は、正方格子でノイマン近傍の場合は、 L が十分大きければ（正確には $L = \infty$ で）0.5 であることが分かっている。

このようにしてクラスターを構成する過程がボンド過程である。図 4 はボンド過程におけるある状態を示している。

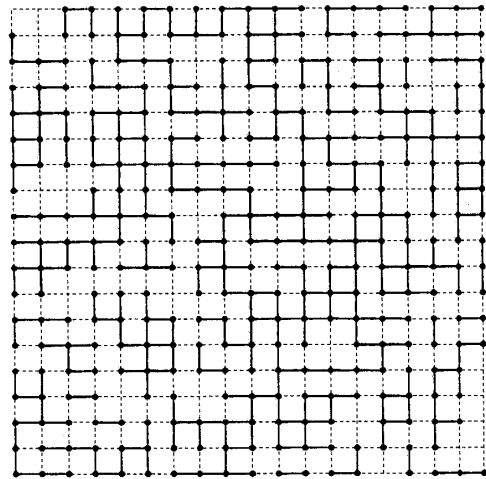
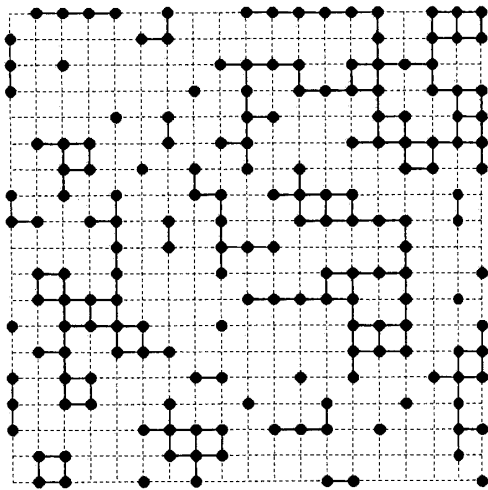


図3 サイト過程 $L=19$, $p_{\text{site}}=0.5$ 図4 ボンド過程 $L=19$, $p_{\text{bond}}=0.5$

2. サイト過程で形成される情報伝達網について

サイト過程において、

- 非占有サイト → 情報伝達に係らない者
- 占有サイト → 情報伝達に係る者
- 非占有ボンド → 使用されていない情報伝達経路
- 占有ボンド → 使用されている情報伝達経路
- クラスター → 情報伝達網
- 最大クラスター → 情報伝達網のうち最大のもの(サイト情報伝達網と呼ぶ)

と読み替えると、サイト過程は、情報伝達網を構成していることになる。

このようにして構成される情報伝達網は、一般にさまざまな大きさの情報伝達網からなっている。まず、占有サイト数と占有ボンド数の関係を調べてみよう。表2は、シミュレーションの結果である。占有サイト数と占有ボンド数は、ほぼ比例関係にある。

表3は最大クラスター(サイト情報伝達網)の占有サイト数と占有ボンド数に関する結果である。表2とは異なり、 p_{site} が1に近づくにつれて急減に大きくなっている。表2と表3中の網掛け部分は浸透閾値に対応している。

表2 サイト過程における占有サイト数と占有ボンド数

p_{site}	サイト数	ボンド数
0.0	0	0
0.1	1000	1980
0.2	2000	3960
0.3	3000	5940
0.4	4000	7920
0.5	5000	9901
0.5927	5927	11735
0.6	6000	11879
0.7	7000	13858
0.8	8000	15840
0.9	9000	17818
1.0	10000	19800

表3 サイト過程の最大クラスターにおける占有サイト数と占有ボンド数

p_{site}	サイト数	ボンド数
0.0	0	0
0.1	6	5
0.2	12	12
0.3	25	27
0.4	58	65
0.5	222	262
0.5927	2847	3579
0.6	3380	4270
0.7	6820	9589
0.8	7977	12666
0.9	8998	16034
1.0	10000	19800

3. ボンド過程によって形成される情報網について

ボンド過程において、サイト過程で形成される情報伝達網について行ったものと同じ読み替えを行う。ただし、情報伝達網のうち最大のものはボンド情報伝達網と読み替える。そうするとボンド過程もサイト過程とは別種の情報伝達網を構成していることになる。

表4は、占有サイト数と占有ボンド数の関係を示している。サイト過程の結果とはかなり異なっている。

表4 ボンド過程における占有サイト数と占有ボンド数

p_{bond}	サイト数	ボンド数
0.0	0	0
0.1	3410	1980
0.2	5867	3960
0.3	7553	5940
0.4	8671	7920
0.5	9348	9901
0.6	9727	11880
0.7	9910	13860
0.8	9981	15840
0.9	9999	17820
1.0	10000	19800

表5 ボンド過程の最大クラスターにおける占有サイト数と占有ボンド数

p_{bond}	サイト数	ボンド数
0.0	0	0
0.1	9	8
0.2	19	19
0.3	49	50
0.4	182	193
0.5	4011	4490
0.6	9384	11620
0.7	9866	13829
0.8	9977	15837
0.9	9998	17819
1.0	10000	19800

表5は最大クラスター（ボンド情報伝達網）の占有サイト数と占有ボンド数に関する結果である。表4と同じ傾向にある。表4と表5中の網掛け部分は浸透閾値に対応している。

4. 二つの情報網の比較

サイト過程とボンド過程の情報伝達網における占有サイト数と占有ボンド数の関係をまとめたグラフが図5である。表2と表4から作成されている。

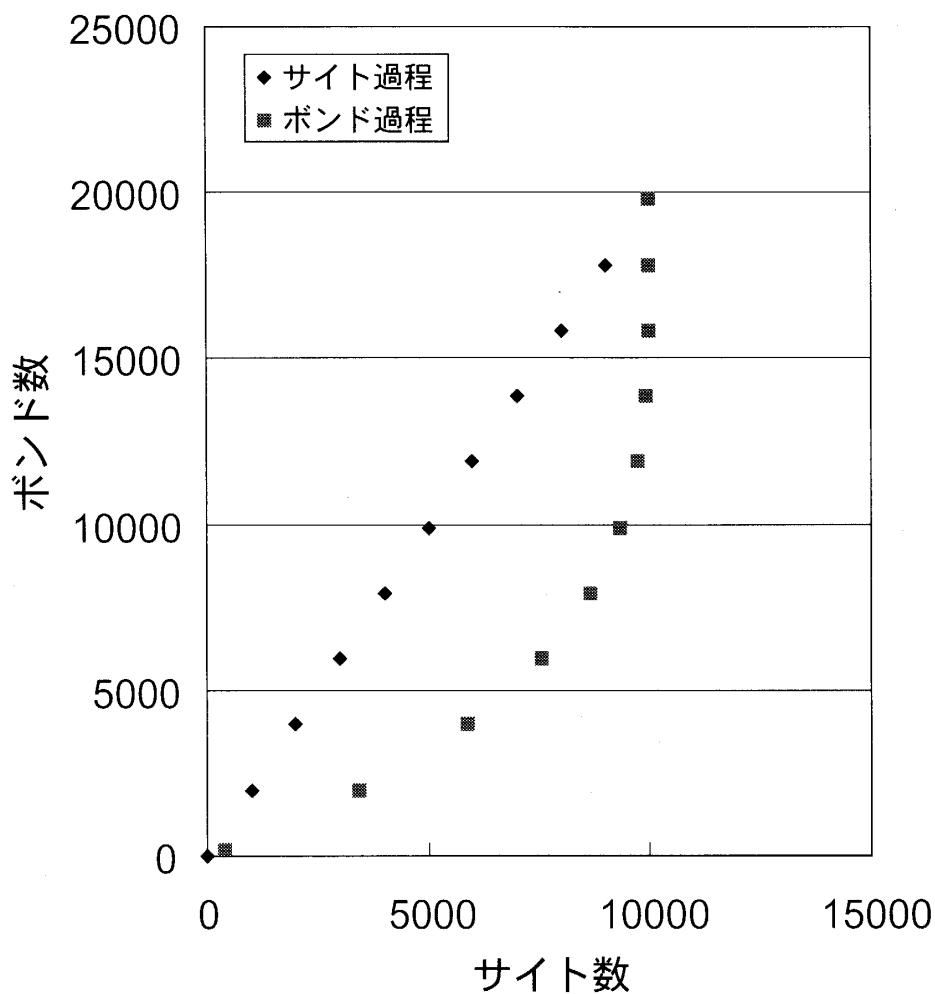


図5 サイト過程とボンド過程の情報伝達網における占有サイト数と占有ボンド数

サイト情報伝達網とボンド情報伝達網における占有サイト数と占有ボンド数の関係をまとめたグラフが図6である。表3と表5から作成されている。

二つの情報伝達網の浸透閾値の状態は○で囲っている。この状態は、社会全体に広がる情報伝達網に対応する浸透クラスターが出現する状態である。サイト情報伝達網

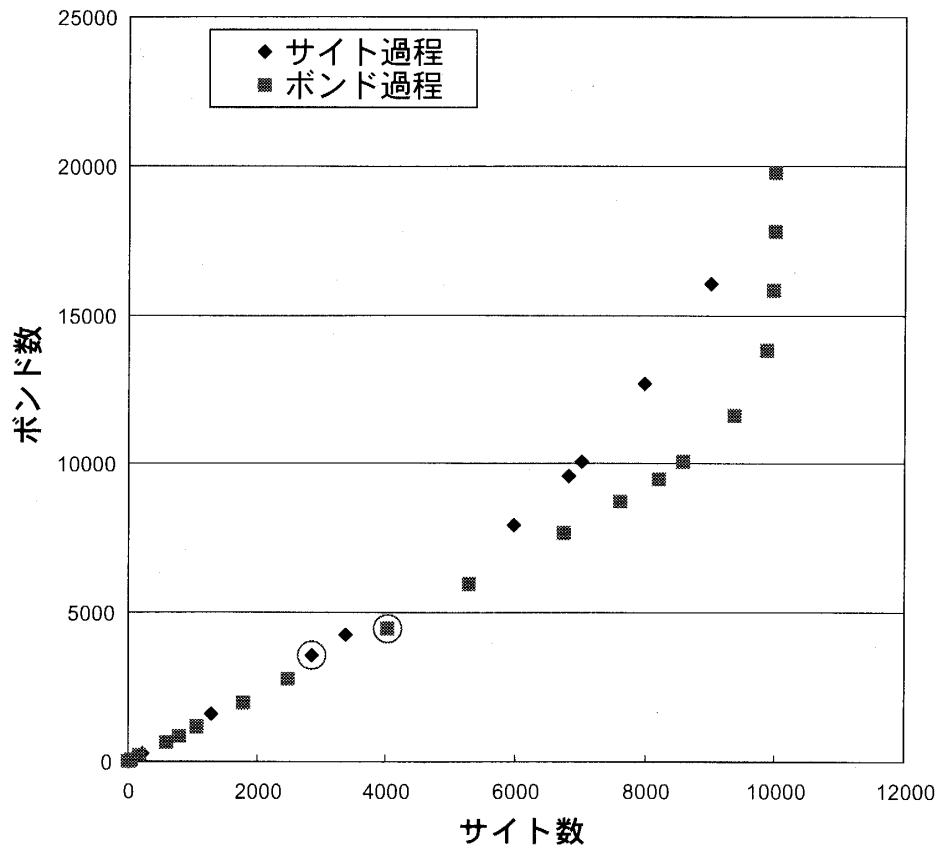


図6 サイト情報伝達網とボンド情報伝達網における占有サイト数と占有ボンド数

の○がボンド情報伝達網の○に比べて横軸の値も縦軸の値も小さいことから、サイト情報伝達網の方が、少ない占有サイト数、少ない占有ボンド数で社会全体に広がる事が分かる。

次に、占有ボンドや占有サイト数の欠落に対する二つの情報伝達網の安定性を比較してみよう。このために、占有ボンド数が同じサイト情報伝達網とボンド情報伝達網を考え、占有ボンド数を減らしていく。最初の占有ボンド数が浸透クラスターを形成するのに十分な大きさだとすると、占有ボンド数がある限界の大きさ（浸透閾値に対応する状態の占有ボンド数）より小さくなると、その情報網は浸透クラスターを形成できなくなる。すなわち、情報網は社会全体に広がらなくなる。サイト情報伝達網とボンド情報伝達網についてこの限界の値を比較すれば、どちらが占有ボンドの欠落に対して安定であるかが分かる。

具体的な数値で調べてみよう。表6参照。最大クラスターの占有ボンド数が10000の状態を出発点とする。

サイト情報伝達網では、最大クラスターの占有ボンド数が10000であるのは、 $p_{\text{site}} =$

表6 二つの情報伝達網における占有ボンド数と占有サイト数

サイト情報伝達網			ボンド情報伝達網		
p_{site}	占有ボンド数	占有サイト数	p_{bond}	占有ボンド数	占有サイト数
0.714	10000	7000	0.55	10000	8600
0.5927	3600	2800	0.5	4500	4000

0.714であり、その時の最大クラスターの占有サイト数は7000である。一方、閾値 $p_{\text{site}} = 0.5927$ における最大クラスターの占有ボンド数は3600、占有サイト数は2800である。したがって、最大クラスターの占有ボンド数が6400本（64%）減少すると、情報網は社会全体に広がらなくなる。

ボンド情報伝達網では、最大クラスターの占有ボンド数が10000であるのは、 $p_{\text{bond}} = 0.55$ であり、その時の最大クラスターの占有サイト数は8600である。一方、閾値 $p_{\text{bond}} = 0.5$ における最大クラスターの占有ボンド数は4500、占有サイト数は4000である。したがって、最大クラスターの占有ボンド数が5500本（55%）減少すると、情報網は社会全体に広がらなくなる。

以上の数値から、最大クラスターの占有ボンド欠落に対する情報網の安定性は、サイト情報伝達網の方が高いことが分かる。同様の議論を、最大クラスターの占有サイト数が同じ状態から出発して、占有サイト数を減らして行き、どちらの情報網が占有サイトの欠落に対して安定であるかを調べることが出来る。図6から、占有サイト欠落に対する情報網の安定性も、サイト情報伝達網のほうが高いことが分かる。たとえば、占有サイトは情報伝達担当者であり、占有ボンドは電話である。災害の際に、情報伝達担当者がいなくなったり、電話が不通になることがある。どちらの場合にも、サイト情報伝達網は安定性が高いことになる。

まとめ

パーコレーション理論のサイト過程とボンド過程によってクラスターを構成し、それぞれにおける最大クラスターを情報伝達網(サイト情報伝達網とボンド情報伝達網)とみなして、その性質を調べた。浸透クラスターを社会全体に広がる情報伝達網を考えると、サイト情報伝達網の方が、少ない占有サイト数、少ない占有ボンド数で社会全体に広がることが分かった。その結果、占有ボンド欠落および占有サイト欠落に対する情報網の安定性は、サイト情報伝達網の方が高いことになる。

ここで使用したモデルは縦横の大きさが100(サイト数10000、ボンド数19800)の正方格子で、つながりはノイマン近傍のみとした。正方格子の大きさをこれより大きく

しても最大クラスターに関する性質は大きくは変わらない。ここに掲げた占有ボンド数などの値は、一つの p_{site} あるいは p_{bond} に対して乱数系列を変えて行った100回のシミュレーションの平均値である。

つながりの範囲を第二近接格子，第三近接格子と広げた場合の安定性，および電子メール等に対応するつながりが距離に無関係で遠距離まで届く場合の情報伝達網についてのシミュレーションは将来の課題としたい。

なお，この論文は著者の一人の卒業論文を発展させたものである。

参考文献

1. 小田垣孝著「つながりの科学——パーコレーション——」(裳華房, 1993)
2. D. Stauffer, "Introduction to Percolation Theory" (Taylor & Francis, London, 1985)
3. 小田垣孝著「つながりの科学」(裳華房, 2000)
4. R.M. Ziff, Phys. Rev. Lett. 69, 2670 (1992)
5. 李綱「パーコレーションモデルによる情報伝達」(九州産業大学国際文化学部卒業論文, 2003)