

【論文】

デジタルフィルタによる TLM 線形波動伝搬の位相誤差補正

小舟 晋平 *¹, 青柳 晃 *²Phase Error Corrections of TLM Linear Wave Propagation
by a Digital Filter

Shinpei KOFUNE Akira AOYAGI

Abstract -TLM(Transmission Line Model) method developed for solving wave equations is free from amplitude errors, but suffers from phase errors as well as the other numerical methods like finite difference methods.

This paper proposes a method to correct the phase errors by using an all-band pass digital filter. The proposed digital filter was found to correct remarkably the dispersion relation of TLM linear wave propagation.

Key Words : TLM, Wave Equation, Phase Error, Digital Filter

1. はじめに

時間発展する物理系の多くは、系の変数に対する常微分方程式や偏微分方程式によって記述される。これらの方程式を数値的に解く方法には、有限差分法、有限要素法、スペクトル法など多くのものがあるが、電気回路との類似性によって系をモデル化し、その時間発展を担うキャパシタやインダクタの時間離散化モデルを基にして系の方程式を数値的に解く TLM モデルが開発されている⁽¹⁾。このモデルは、集中回路素子であるキャパシタやインダクタを分布定数素子である伝送線で模擬するもので、それぞれ 2 端子で模擬するスタブモデルと 4 端子で模擬するリンクモデルがある。

波の伝搬速度が波高値に依存するような非線形波動方程式を数値的に精度よく解くためには、対応する線形の波動方程式を精度よく解くことが条件である。このことは TLM モデルに限らず他の方法についても言えることである。

線形波動方程式を数値的に精度よく解くために無損失 LC 梯子型回路に TLM モデルを適用する。無損失 LC 梯子型回路の連続モデルが無損失伝送線路になり、その電圧・電流の伝搬特性が線形の波動方程式を満たすことから、TLM モデ

ルは波動方程式の解法に適したモデルである。更に、TLM モデルには初等的な電気回路理論が適用できるという利点がある。

しかしながら、他の数値解法と同様に時間ステップ間隔 Δt と空間差分間隔 Δx (LC 梯子型回路では LC 一段の長さ) が有限であることによる位相誤差を避けることはできない。精度よく解くためにはこの位相誤差を小さくする必要がある。

LC 梯子型回路の電圧・電流伝搬特性を TLM モデルでシミュレーションするとき、取り扱いが簡単になるようにキャパシタにはリンクモデル、インダクタにはスタブモデルを用いる。この系の電圧・電流伝搬特性は正方向進行波および負方向進行波とも進行方向に対して短波長成分が遅れて伝搬する。このため、ガウス分布波形を与えた場合、時間の進展とともに 2 つの進行波は後方に連状の波を伴って伝搬するようになる。

本論文では、この短波長成分の伝搬速度の遅れを改善する方法として、キャパシタのリンクモデルに対する両端子間の反射電圧にデジタルフィルタを適用した位相補正を提案する。

* 1 工学研究科電気工学専攻 M2

* 2 電気工学科

2. LC 梯子型回路の TLM シミュレーション および数値計算結果

図 1 に N 段で構成される LC 梯子型回路を示す。段数を $g(g=1,2,\dots,N-1)$, インダクタにかかる電圧を w_g , キャパシタにかかる電圧を V_g , 流れる電流を i_g とおく。この図の左右両端子を接続したループ状 LC 梯子型回路に対して周期境界条件

$$V_0 = V_N$$

$$w_0 = w_N$$

$$i_0 = i_N$$

を仮定する。ただし、新しく生じた閉路は N 段になるがあらためてこれを 0 段とした。

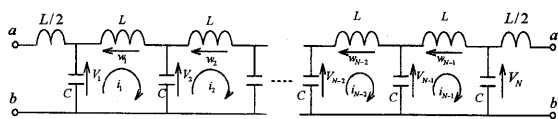


図 1 LC 梯子型回路

図 1 の回路におけるキャパシタンス C をリンクモデル, インダクタンス L をスタブモデルで模擬し, 各時間ステップにおける各段の電流・電圧の数値計算を行う。ただし, g 段目におけるキャパシタのリンクモデルに対する V_g の入力端子電圧を u_g , 出力端子電圧を v_g とおいた。また, u_g^i, v_g^i および w_g^i はそれぞれ u_g, v_g および w_g の入射電圧, u_g^r, v_g^r および w_g^r は反射電圧である。 Z_L および Z_C は, L および C の特性インピーダンスで

$$Z_L = \frac{2L}{\Delta t}, \quad Z_C = \frac{\Delta t}{C}$$

で与えられる。ただし Δt は時間ステップ幅である。

次に, TLM モデルの数値計算アルゴリズムについて述べる。数値計算を行うに当たって初期条件を g 段目の電流に対して

$$i_g(0) = 0$$

電圧に対して次の正規分布

$$v_g(0) = u_g(0) = \exp\left[-\beta\Delta x\left(g - \frac{N}{2}\right)^2\right]$$

とおく。ただし, β は正規分布のパラメータで

ある。このとき w_g の初期条件は

$$w_g(0) = v_g(0) - u_{g+1}(0) \quad (1)$$

となる。これより, 入射電圧の初期条件は,

$$v_g^i(0) = \frac{1}{2}[v_g(0) + Z_C i_g(0)]$$

$$u_{g+1}^i(0) = \frac{1}{2}[u_{g+1}(0) - Z_C i_g(0)] \quad (2)$$

$$w_g^i(0) = \frac{1}{2}[w_g(0) - Z_L i_g(0)]$$

となる。

時間ステップ n における各段の電流および電圧は

$$i_g(n) = \frac{2[v_g^i(n) - u_{g+1}^i(n) - w_g^i(n)]}{2Z_C + Z_L}$$

$$v_g(n) = 2v_g^i(n) - Z_C i_g(n)$$

$$u_{g+1}(n) = 2u_{g+1}^i(n) + Z_C i_g(n) \quad (3)$$

$$w_g(n) = 2w_g^i(n) + Z_L i_g(n)$$

で与えられる。これより反射電圧は

$$v_g^r(n) = v_g(n) - v_g^i(n)$$

$$u_{g+1}^r(n) = u_{g+1}(n) - u_{g+1}^i(n) \quad (4)$$

$$w_g^r(n) = w_g(n) - w_g^i(n)$$

となる。これより時間ステップ $n+1$ のそれぞれの入射電圧は

$$v_g^i(n+1) = u_g^r(n)$$

$$u_{g+1}^i(n+1) = v_g^r(n) \quad (5)$$

$$w_g^i(n+1) = -w_g^r(n)$$

で与えられ, この手順を繰り返すことで, 各時間ステップの電圧と電流が求まる。

LC 梯子型回路の TLM シミュレーションに必要な各パラメータの値を

$$L = 1 \text{ [H]}, \quad C = 1 \text{ [F]}, \quad \Delta t = 0.1 \text{ [s]}, \quad N = 100, \\ \beta = 0.04, \quad \Delta x = 1 \text{ [m]}$$

と与える。時間ステップ $n=0$ および $n=1250$ における電圧 u_g を図 2 および図 3 に示す。また $n=1250$ における u_g の理論曲線

$$u_g = \frac{1}{2} \exp\left[-\beta\Delta x^2\left(g - \frac{\Delta x}{\sqrt{LC}}n\Delta t - \frac{N}{2}\right)^2\right] \\ + \frac{1}{2} \exp\left[-\beta\Delta x^2\left(g + \frac{\Delta x}{\sqrt{LC}}n\Delta t - \frac{N}{2}\right)^2\right]$$

を図4に示す。各図の矢印は波の伝搬方向を示す。

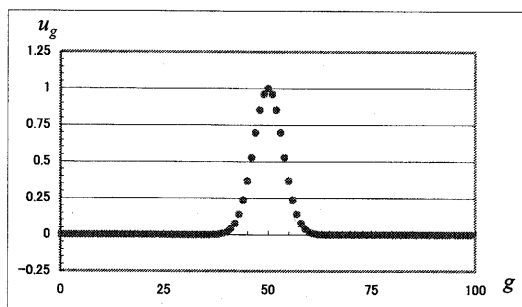


図2 n=0におけるu_g

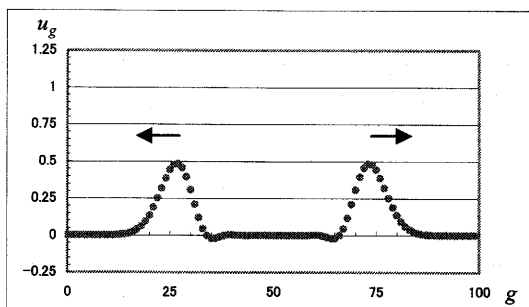


図3 n=1250におけるu_g

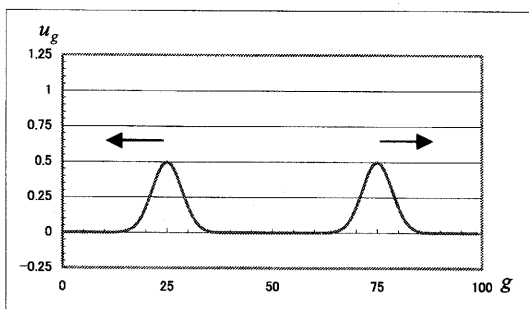


図4 n=1250におけるu_gの理論曲線

波動方程式の一般解は、正方向進行波と負方向進行波の和である。図3および図4は二つの波が進んでいる様子を示す。図3と図4を比較すると波の後方部分の波形に窪みが生じている。この理由は時間ステップの経過とともに位相誤差が累積したためであると考えられる。

3. LC梯子型回路のTLMモデルにおける位相誤差

この位相誤差の原因を調べるためにTLMモデルの数値計算アルゴリズムを詳細に検討し、電圧および電流に対する分散関係式を導く。

式(1)～(5)を用いて $u_g^i(n), v_g^i(n), w_g^i(n)$ および $w_g(n)$ を消去すると

$$\begin{cases} v_g(n+1) - u_g(n) - Z_C i_{g-1}(n) + Z_C i_g(n+1) = 0 \\ -v_{g+1}(n) + u_{g+1}(n+1) + Z_C i_{g+1}(n) - Z_C i_g(n+1) = 0 \\ v_g(n+1) + v_g(n) - u_{g+1}(n+1) - u_{g+1}(n) + Z_L i_g(n) - Z_L i_g(n+1) = 0 \end{cases}$$

を得る。

上式において、波数 k 、角周波数 ω の平面波解

$$v_g(n) = v(k) e^{j(kg\Delta x - \omega n\Delta t)}$$

$$u_g(n) = u(k) e^{j(kg\Delta x - \omega n\Delta t)}$$

$$i_g(n) = i(k) e^{j(kg\Delta x - \omega n\Delta t)}$$

を仮定することによって次の分散関係式

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left[\frac{\Delta t}{\sqrt{LC + \Delta t^2}} \sin \left(\frac{k\Delta x}{2} \right) \right] \quad (6)$$

を得る。

分散関係式(6)を図5の点線で示す。ただし、各パラメータは2節で設定された値を用いた。この図の実線は $k=0$ 近傍における傾き

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\Delta x}{\sqrt{LC + \Delta t^2}}$$

をもつ直線である。

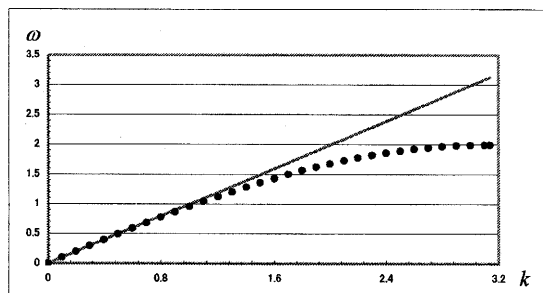


図5 分散関係式(k-omega特性)

分散関係式より位相速度 ω/k が求まる。直線の位相速度が一定であるのに対して式(6)の点線は、短波長になるにつれて位相速度が小さくなる。このことから、2節で述べた波形の窪みの理由は短波長の波の位相速度の誤差の累積に帰因するものと考えられる。

この位相誤差を補正するために、短波長部分における位相をデジタルフィルタによって進ませ位相速度の減少を抑えることを考える。すなわち、図5の点線を実線に近づかせるようなデジタルフィルタを作成する。

4. 位相補正デジタルフィルタ (2), (3), (4)

フィルタへの入力データを x_g , 出力データを y_g , フィルタ係数を a_g とした次式のような M 次デジタルフィルタを考える.

$$y_g = \sum_{g'=1}^M a_{g'} y_{g+g'} + x_g - \sum_{g'=1}^M a_{g'} x_{g-g'} \quad (7)$$

($g = 0, 1, 2, \dots, N-1$)

ただし, 次の周期境界条件を仮定する.

$$\begin{aligned} y_{N+g'} &= y_{g'} & , & & y_{-g'} &= y_{N-g'} \\ x_{N+g'} &= x_{g'} & , & & x_{-g'} &= x_{N-g'} \end{aligned} \quad (8)$$

($g' = 0, 1, 2, \dots, M$)

前節で用いた平面波解の空間位相角を

$$\theta = k\Delta x \quad (9)$$

とおく. 入力データ x_g , 出力データ y_g の波数 k のフーリエモードに対して

$$x_g = x(\theta)e^{jg\theta} \quad , \quad y_g = y(\theta)e^{jg\theta}$$

として, これらを式 (7) に代入し, 入力データと出力データの比 $\Gamma(\theta, M)$ を求めると

$$\Gamma(\theta, M) = \frac{1 - \sum_{g'=1}^M a_{g'} \cos(g'\theta) + j \sum_{g'=1}^M a_{g'} \sin(g'\theta)}{1 - \sum_{g'=1}^M a_{g'} \cos(g'\theta) - j \sum_{g'=1}^M a_{g'} \sin(g'\theta)}$$

となる. $\Gamma(\theta, M)$ の複素共役を $\Gamma^*(\theta, M)$ とおくと, 上式より

$$\Gamma^*(\theta, M) = \frac{1}{\Gamma(\theta, M)}$$

より

$$|\Gamma(\theta, M)| = 1$$

となる. また, $\Gamma(\theta, M)$ の位相角は

$$\arg \Gamma(\theta, M) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{\sum_{g'=1}^M a_{g'} \sin(g'\theta)}{1 - \sum_{g'=1}^M a_{g'} \cos(g'\theta)} \right]$$

となる. 以後 $M=2$ とした 2 次のデジタルフィルタを考える. 簡略化のため, $\arg \Gamma(\theta, 2)$ を

$$\phi(\theta) = \arg \Gamma(\theta, 2) = 2 \tan^{-1}[z] \quad (10)$$

とおく. ただし

$$z = \frac{\sum_{g'=1}^2 a_{g'} \sin(g'\theta)}{1 - \sum_{g'=1}^2 a_{g'} \cos(g'\theta)}$$

である.

図 5 を参照して, $\theta=0$ における傾きを実線の傾きと一致させるために

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} = 0$$

の条件をおく. よって, $\phi(\theta)$ を θ で偏微分した式に $\theta=0$ を代入すると

$$\sum_{g'=1}^2 g' a_{g'} = 0$$

を得る.

2 次のデジタルフィルタのフィルタ係数 a_1 および a_2 の間には, 上式より

$$a_2 = -\frac{a_1}{2}$$

の関係がある. ここで, $a_1 = a$ とおき, 式 (7) に代入すると

$$y_g - a y_{g+1} + \frac{a}{2} y_{g+2} = \alpha_g \quad (11)$$

($g = 0, 1, 2, \dots, N-1$)

となる. ただし

$$\alpha_g = x_g - a x_{g-1} + \frac{a}{2} x_{g-2}$$

($g = 0, 1, 2, \dots, N-1$)

とおいた. また, 式 (8) の周期境界条件を用いる.

式 (11) は, 入力データ ($\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}$) および 2 つの出力データ y_0, y_1 を与えると, すべての

出力データ $y_{N-1}, y_{N-2}, \dots, y_0$ が求まるので、一般に

$$y_g = A_g y_0 + B_g y_1 + C_g \quad (12)$$

$$(g = 0, 1, 2, \dots, N-1)$$

とおくことが出来る。 A_g, B_g および C_g は式 (11) から定まる係数である。式 (12) を式 (11) に代入して

$$A_g y_0 + B_g y_1 + C_g = \left(aA_{g+1} - \frac{a}{2} A_{g+2} \right) y_0 + \left(aB_{g+1} - \frac{a}{2} B_{g+2} \right) y_1 + \left(aC_{g+1} - \frac{a}{2} C_{g+2} + \alpha_g \right) \quad (13)$$

を得る。この式の両辺を比較することによって

$$\begin{cases} A_g = aA_{g+1} - \frac{a}{2} A_{g+2} \\ B_g = aB_{g+1} - \frac{a}{2} B_{g+2} \\ C_g = aC_{g+1} - \frac{a}{2} C_{g+2} + \alpha_g \end{cases} \quad (14)$$

$$(g = N-1, N-2, \dots, 0)$$

を得る。上式より A_g, B_g および C_g を求めるには、それぞれ2つの初期値、 $A_{N-1}, A_{N-2}, B_{N-1}, B_{N-2}$ および C_{N-1}, C_{N-2} が必要である。これらの値は式 (11) ~ (14) より

$$A_{N-1} = a, B_{N-1} = -\frac{a}{2}, C_{N-1} = \alpha_{N-1}$$

$$A_{N-2} = aA_{N-1} - \frac{a}{2}, B_{N-2} = aB_{N-1}, C_{N-2} = aC_{N-1} + \alpha_{N-2}$$

となる。これらの初期値を用いて A_g, B_g および C_g ($g = N-3, N-4, \dots, 1, 0$) のすべての係数が求まる。

次に y_0 および y_1 は式 (12) から

$$\begin{cases} y_0 = \frac{(1-B_1)C_0 + B_0C_1}{(1-A_0)(1-B_1) - A_1B_0} \\ y_1 = \frac{A_1C_0 + (1-A_0)C_1}{(1-A_0)(1-B_1) - A_1B_0} \end{cases}$$

と求まる。 y_0 および y_1 が求まると、式 (14) より出力データ $y_g (2, 3, \dots, N-1)$ がすべて求まる。

5. フィルタ係数の決定

2節の計算条件におけるTLMモデルの位相誤差の補正に最も適したフィルタ係数 a の値を決定する。

最適なフィルタ係数 a は、図4の実線で表わす直線とTLMモデルの分散関係式を表わす点線との間の差を最小にすることによって決定される。その差は式(9)より次式で与えられる。

$$r(\theta) = \frac{\Delta x}{\sqrt{LC + \Delta t^2}} \theta - \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1} \left[\frac{\Delta t}{\sqrt{LC + \Delta t^2}} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$

一方、4節で定義したディジタルフィルタの位相角 $\phi(\theta)$ は

$$\phi(\theta) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{a \sin(\theta) - \frac{a}{2} \sin(2\theta)}{1 - a \cos(\theta) + \frac{a}{2} \cos(2\theta)} \right]$$

で与えられる。 $|r(\theta) - \phi(\theta)|$ が最小になることが最適なフィルタ係数 a の値の条件である。

$r(\theta)$ を実線、 $\phi(\theta)$ を点線で表わしたものを図6に示す。この図より、 $|r(\theta) - \phi(\theta)|$ が最小となるフィルタ係数は $a = 0.05$ 近傍であると考えられるのでフィルタ係数を $a = 0.04, a = 0.05$ および $a = 0.06$ としたときの $\phi(\theta)$ と $r(\theta)$ を図7に示す。図7を見ると、 $\theta = 0 \sim 1$ の長波長領域で3つのデータが近接して、最も有効なフィルタ係数の値を決定することは困難である。

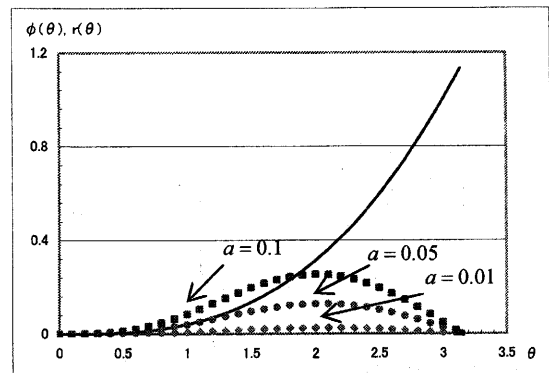


図6 $r(\theta)$ および $\phi(\theta)$ ($a = 0.01, 0.05, 0.1$)

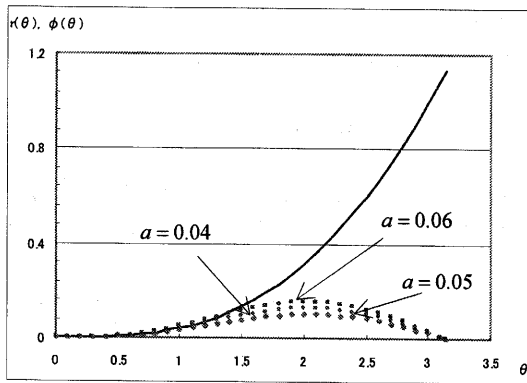


図7 $r(\theta)$ および $\phi(\theta)$ ($a=0.04, 0.05, 0.06$)

そのため、電圧 u_g に対する理論値

$$\bar{u}_g = \frac{1}{2} \exp \left[-\beta \Delta x^2 \left(g - \frac{\Delta x}{\sqrt{LC + \Delta t^2}} n \Delta t - \frac{N}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \exp \left[-\beta \Delta x^2 \left(g + \frac{\Delta x}{\sqrt{LC + \Delta t^2}} n \Delta t - \frac{N}{2} \right)^2 \right]$$

と計算値との相対誤差を $a=0.05$ 近傍で詳細に検討する。時間ステップ n における相対誤差を

$$E(n) = \frac{\sqrt{\sum_{g=0}^{N-1} [u_g(n) - \bar{u}_g(n)]^2}}{\sqrt{\sum_{g=0}^{N-1} [\bar{u}_g(n)]^2}} \quad [\%]$$

と与えた。

$n=1200$ における $E(n)$ とフィルタ係数 a との関係を図8に示す。

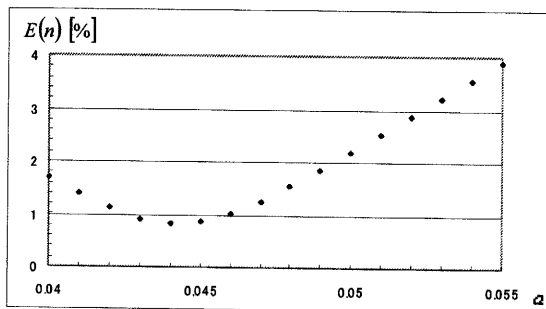


図8 $E(n) - a$ 特性

この図および他の時間ステップにおける $E(n) - a$ 特性から $a=0.044$ が最も誤差が小さいことが確認できた。

6. デジタルフィルタの有効性の検討

長時間計算した場合のデジタルフィルタの有効性を確認するために、フィルタを用いたときと用いないときの $E(n) - n$ 特性を図9に示す。ただし、フィルタ係数は $a=0.044$ である。

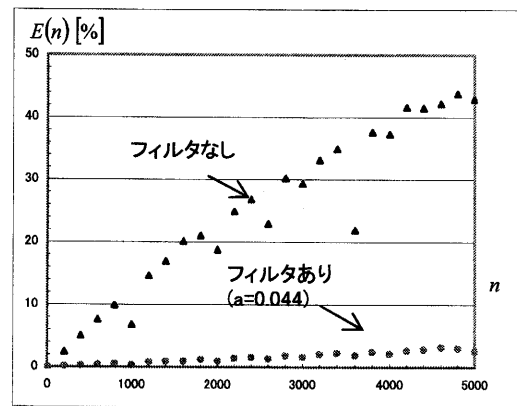


図9 $E(n) - n$ 特性

この図から、デジタルフィルタを用いなければ、5000 ステップまでに、約 45% の誤差が生じるのに対し、 $a=0.044$ のデジタルフィルタを用いれば 5000 ステップの長時間計算でも誤差が 5% にも満たないことが分かる。

このことよりデジタルフィルタを用いることによって、長時間ステップの TLM 数値計算による位相誤差が有効に補正されることが確認できた。

参考文献

- (1) C・クリストポロス, 加川幸雄[訳]: TLM 伝達線路行列法入門 (培風館)
- (2) 牛田明夫, 田中 衛: 電子回路シミュレーション (コロナ社)
- (3) 三谷政昭: デジタルフィルタシミュレーション (昭晃堂)
- (4) 中村尚五: ビギナーズデジタルフィルタ (東京電機大学出版局)