

SANQシステム同定法による マクロ経済モデルのパラメータ同定*

——為替レート動学式のパラメータ同定——

秋 山 優

目 次

1. はじめに
2. SANQシステム同定法
3. 経済モデルへの適用
4. 問題点および今後の課題

1. はじめに

複雑な経済現象を理論的に解明しようとするとき、われわれはしばしば抽象化によりモデルを定式化し、そのモデルから導き出される論理的帰結に基づいて議論を展開することがある。とくに、モデルの示す政策的なインプリケーションについて議論がなされる場合には、それが数理的モデルであれ計量経済的モデルであれ、議論の場において採用された経済モデルが真に信頼しうるモデルであるか、あるいは現実の経済現象のある面をどのくらい正確に反映し得ているか等が問われることになる。たとえば最適な経済政策を選択するために、コントロール可能な政策変数を変化させることによって生じる政策効果のシミュレーション分析をおこなうときには、少なくとも採用されたモデルが現実経済の動きをある程度正確に描写できていなければなるまい。この点に関して、理論モデルを実証分析によって

検証する必要性が生じてくるのである。

経済モデルを建て経済政策の効果等について考察する際に問題となるのは、果たしてそのモデルは信頼しうるのか、またどのようにすれば信頼できるモデルを構築することができるのかということであるが、伝統的な計量経済学による理論モデルの検証は、さまざまな検定方法を用意しており、かなりの程度までこのような要請に応じてきていると考えられる。しかしながら、考察の対象となる理論モデルが連続時間の下での微分方程式系で表されている場合に、計量経済学の手法によってモデルのパラメータを推定しようとするならば、定常状態においてパラメータの推定を行うかもしくはモデルを離散時間の差分形に変換しなければならない、連続系のダイナミクスのままパラメータを推定することはできないのである。

そこで本稿では、連続時間の下で微分方程式によって表される中・短期のマクロ理論式について、観測データ数が極めて少ない場合でも十分に推定可能な工学的手法である S A N Q システム同定法 (Simulator-based Approach to Neat and Quick System Identification Methods) を用いることによって、モデルの未知パラメータを推定することを試みた。

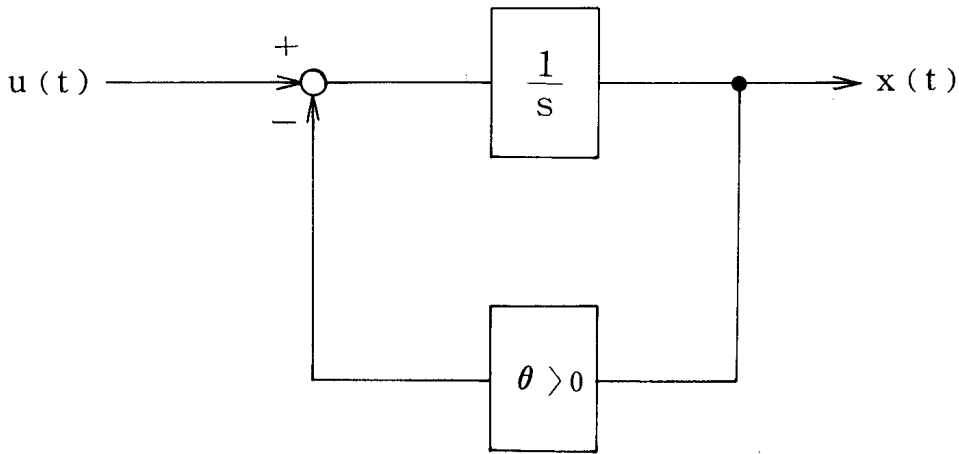
たとえば、ある経済現象あるいは経済活動を説明する理論モデルが、以下のような t を連続時間とし θ を未知パラメータとする微分方程式で記述されているとしよう。

$$\dot{x}(t) = -\theta x(t) + u(t), \theta > 0.$$

この微分方程式を伝達関数を用いて書き換えると、【図 1—1】のようなブロックダイアグラムで表すことができる。ただし、変数 $u(t)$ を入力、状態変数 $x(t)$ を出力、 $1/s$ が書き入れられたボックスを積分器と呼ぶことにする。このとき、実際の入出力データを観測することによって、理論的には正の値を取りうるという制約だけしか想定されていない未知パラメータ

【図1-1】 ブロック・ダイアグラム

理論モデル： $\dot{x}(t) = -\theta x(t) + u(t)$, $\theta > 0$.



θ の値を工学的に推定しよう（同定しよう）というのである。

SANQシステム同定法の詳細については次節において説明するが、本来は電力会社の火力発電プラントの蒸気温度制御系として開発されたモデル規範形適応先行制御システム（MRACS：Model Reference Adaptive Control System）におけるパラメータ同定法のことである¹⁾。内田等 [8] は、経済現象をモデル分析で解明する際にモデルが構造的には制御理論でいうところの閉回路を構成していると考え、MRACSを経済政策の決定問題に適用することを試みた。しかしながら、政策効果のシミュレーション分析をおこなうときに必ず問題となるのは、先ほども述べたようにモデルの信頼性である。

国際経済学の領域で例を挙げるならば、アブソープションアプローチにせよアセットアプローチにせよ為替レートの動学的調整過程を分析する場合や、ゲーム論的モデルを用いて国際的な政策協調の問題を解明する場合に、構造パラメータの値に依存してモデルの定性的分析が異なり、したがって同じモデルを用いているにもかかわらず数理的解析から得られる論理

的帰結が違ふことすら生じることになる。より具体的にいえば、為替レート
の動学的調整経路の安定性分析において、パラメータの値に依存して発
散することもあるれば安定均衡となることもあるのである²⁾。ゲーム論に依
拠した政策協調の議論に対して重大な疑義を投げかけている主張のひとつ
として、当事国の一方が真のモデルを知り得ていないかもしくは知らされ
ていなくて、相手国がそのことを利用して自国に都合のよい偽りのモデル
あるいは粉飾したモデルを提示する場合があげられる³⁾。このような問題
も、真のモデルの作成問題と密接に関連していると考えられよう。

本稿の目的は、理論モデルであるマクロ動学方程式の構造パラメータを
推定する場合に、伝統的な統計学に依拠した計量経済学的手法に依らず、
動的システムのパラメータ同定という工学的手法を経済モデルの構造パラ
メータ推定に適用する研究の成果について報告を行うことである。しかし
ながら、これまでの同定方法にはいくつかの問題点があり、経済モデルの
パラメータ同定に適用するには困難であった。

従来のパラメータ同定法に関する問題点について、SANQシステム同
定法と比較しつつ内田 [6] は以下のように要約している。

第一の問題点は、PE (Persistently Exciting) 条件が同定のためには必
要であるが、例えば四半期毎の観測値のようにデータ取得の間隔が空くの
で短期間 (例えば1年間) 程度のデータでは、PE条件が満たされないこ
とが挙げられる。したがって、長期間のデータを用いて経済モデルを作成
しなければならなくなった。しかしながら、とくに経済モデルの場合には
その間にパラメータが変化していると考えられるから、このような同定法
によって信頼性の高いモデルを推定することは困難である。

第二の問題点は、経済現象は数学的には常に過渡状態にあるので、AR
モデル等のように偏差分についてモデル化を行ったとしても、理論的には

基本特性 (Nominal Trajectory) の変化に関するモデルの作成も必要であり、したがって長期と短期のモデルは別個に取り扱われなければならないことになろう。しかしながら、経済モデルは基本的には非線形であるため厳密に言えばこの二つのモデルは相互に干渉しているはずである。このように経済現象を説明するモデルは非線形の時変系となるはずであるが、基本的に常に過渡状態にあるためモデルの中の積分器の出力の値をパラメータと同様同定する必要がある。この点が、従来の同定法では考慮されていない。

問題の第三は、非線形時変系のパラメータ同定を行わなければ短期間におけるダイナミクスを正確に認識することはできないのであるが、その手法が確立されていないことである。

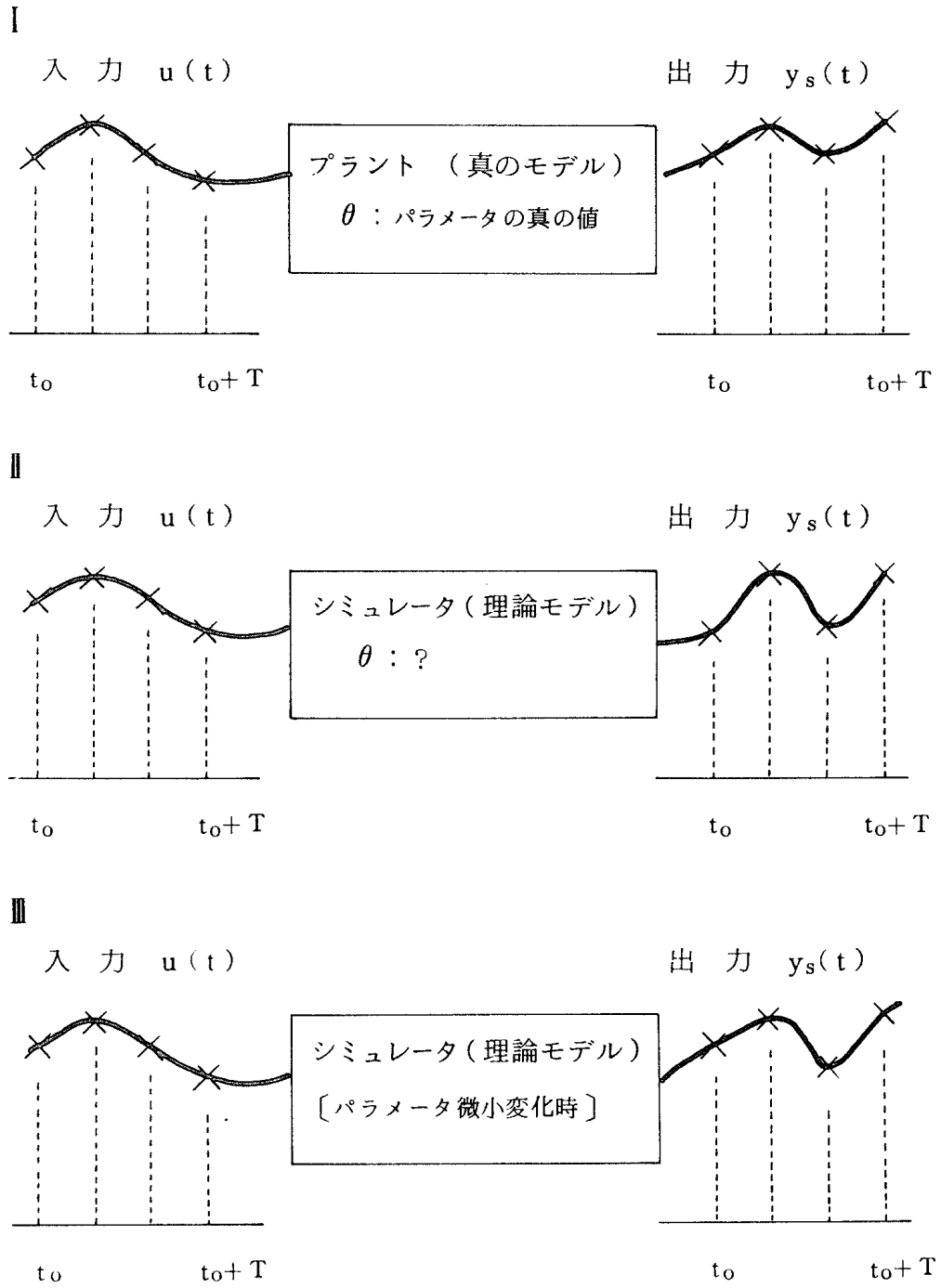
第四の問題点でしかも最大の問題点は、経済モデルの場合工学分野におけるような実験が実施できないことである。ただし、工学分野においても操業状態を乱さずにパラメータ同定等をおこない故障の早期発見や診断およびその後の安定運転維持も可能にすることが出来るならば非常に有用であるから、外生入力をテストのために注入することなくパラメータを同定する方法が開発されるならばその価値は十分に大きい。

これらの諸問題を解決するために考案したSANQシステム同定法を経済モデルの未知パラメータおよび積分器の出力の同定に適用することを試みた。

2. SANQシステム同定法

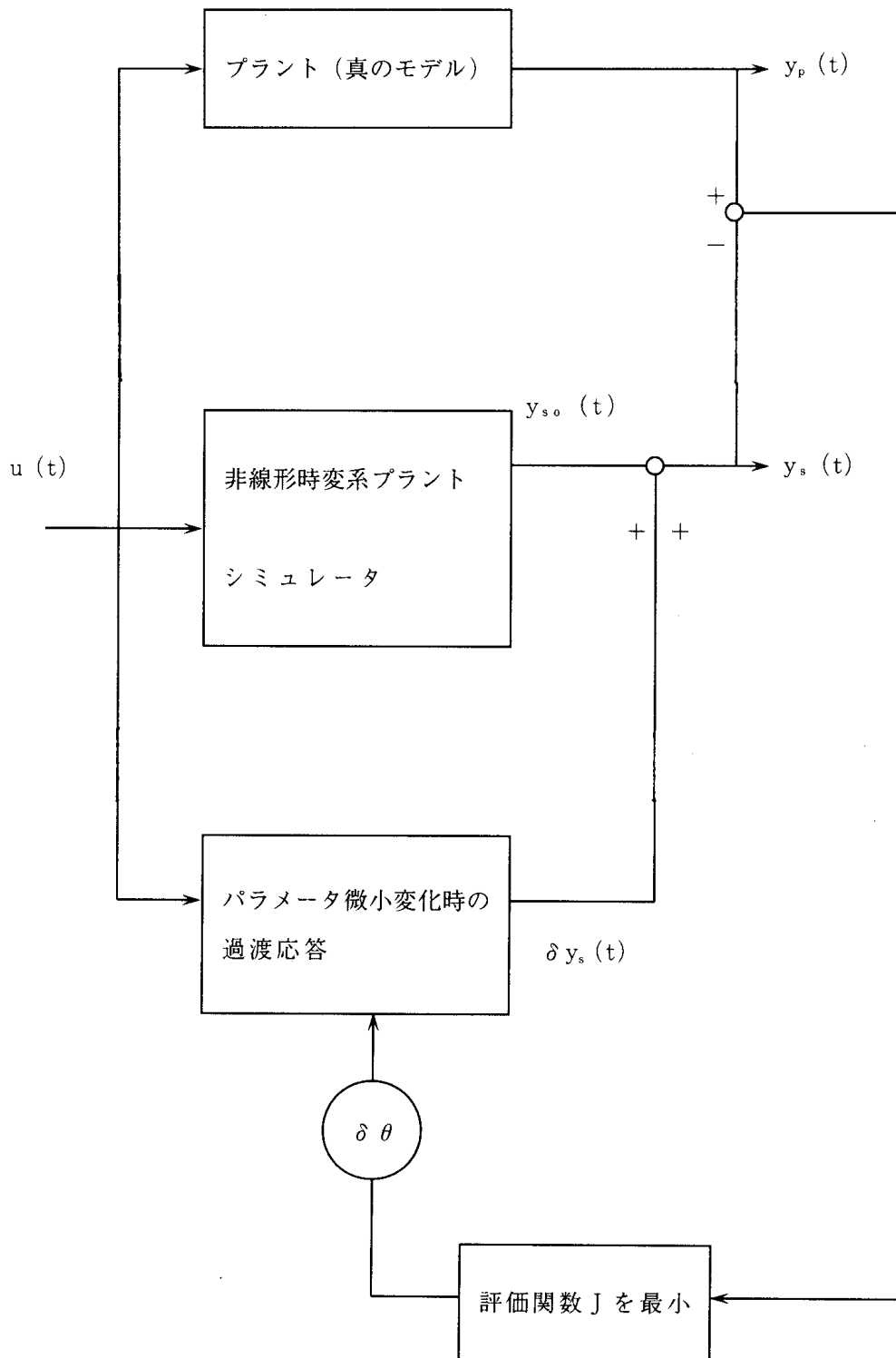
パラメータ同定というのは、一般的には微分方程式系で表されるような動的システムの構造を定める未知パラメータを求めることである。言い換

【図 2—1】



注：IIにおいて、同定用の外生入力信号を注入するのが、出力誤差法。

SANQシステム同定法の原理



$$J = \int_{t_0}^{t_0+T} \{y_p(t) - y_s(t)\}^2 dt$$

えれば、対象となるプラントに対してある入力信号が注入された結果生じる出力信号の変化を理論的に解析し、その動的システムのプラント構造をできるだけ正確に表現するような数理的モデル、すなわち微分方程式系で記述されたシミュレーターを作成し、そのモデルの未知の構造パラメータを推定することである。このようなパラメータ同定法を模式図として表したのが【図2-1】である。

入力信号および出力信号がそれぞれモニター可能であるような、非定常状態にあるプラントに対して、そのプラント構造を正確に描写する非線形時変系のシミュレータを理論的に構築し、極めて短期間(時間 $t: t_0 \leq t \leq t_0 + T$) の入出力データを用いてシステムのパラメータ同定を行うのである。いま、システムのパラメータの真値 (θ) が未知であるから、プラントの観測出力(プラントの状態変数)を $y_p(t)$ とし、シミュレータ出力(シミュレータの状態変数)を $y_s(t)$ としたとき、シミュレータ出力が同定対象のプラント出力に常に一致するようなパラメータ $\hat{\theta}$ を推定することがシステム同定の目的である。

ところで、出力誤差法に代表される従来の同定法では、入力データ $u(t)$ が同定可能な条件 (PE 条件) を満たすように同定用の入力信号を実験的に発生させなければならなかった。しかしながら、SANQシステム同定法では、シミュレータに初期値として与えるパラメータ $\hat{\theta}$ をステップ状に微小変化させることによって同じ条件を満たすようにするところが、これまでの同定方法とは技術的に全く異なる、新しい点である。すなわち、シミュレータのパラメータをステップ状に変化させれば、その度に異なる周波数を含む入力が入力されたのと同じ効果が得られることに注目し、同定可能な条件 (PE 条件) を満たすようにしている。

いま、議論の単純化のために、同定期間中にパラメータが一定であるよ

うな時不変の線形系のシミュレータを用意し、 k 個の外生入力と1個の観測出力(状態変数)、 m 個の未知パラメータからシステムが構成されているとしよう。このとき、SANQシステム同定法による未知パラメータの同定作業のアルゴリズムについて、【図2-2】を用いて説明する⁴⁾。

期間 T ($t_0 \leq t \leq t_0 + T$)において観測可能な $k+1$ 個の入出力データの情報からパラメータ同定をおこなうものとし、その同定開始時点 t_0 にシミュレータに初期設定値として適当に与えたパラメータ $\hat{\theta}_0$ をステップ状に微小変化させ ($\theta_0 + \Delta\theta$)、そのことによって生じるシミュレータの過渡応答 $\delta y_s(t)$ 、すなわち、

$$\delta y_s(t) = \frac{\partial y_s(t)}{\partial \theta} \delta \theta$$

をテーラー展開の1次近似により導出する。そして、その過渡応答の積分を数値計算することによってパラメータをわずかに変化させたときのシミュレータの応答出力 ($y_s(t) | \theta_0 + \Delta\theta$) を求め、その応答出力 $y_s(t)$ と観測されるプラント出力 $y_p(t)$ との差を最小自乗法の意味で最小にするようにパラメータ $\hat{\theta}$ の修正をおこなうという手順となっている。

このときパラメータ $\hat{\theta}$ の修正量 $\delta\hat{\theta}$ は、以下のような評価関数を最小にするよう求めるものとする。

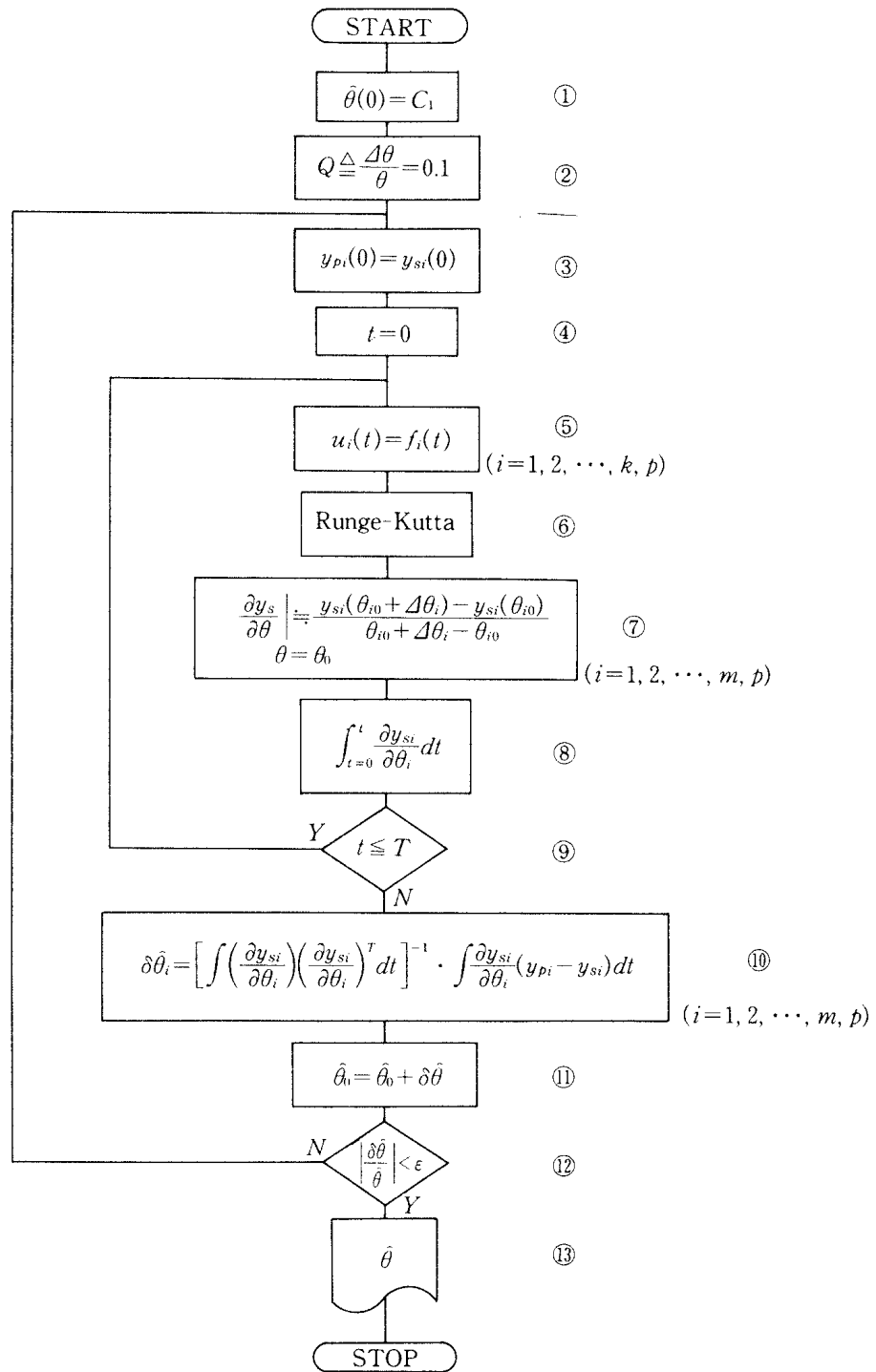
$$\min \int_{t_0}^{t_0+T} \{y_p(t) - y_s(t)\}^2 dt$$

そして、パラメータの修正量が非常に小さくなるまでこのような一連の作業を繰り返すことによって同定の精度を高めるのである。

- ① シミュレータ上の未知パラメータ $\hat{\theta}$ に適当な初期値 $\hat{\theta}_0$ を与える。

このとき、できるだけ真値に近いあるいは近いと考えられる値をフィ

【図2-2】 SANQシステム同定法のアルゴリズム⁴⁾



ードすることができれば、繰り返し演算の回数が少なくてすむことになる。

- ② パラメータ θ の微小変化のステップ刻みを10%に設定する。
- ③ 同定開始時点 $t=t_0$ におけるシミュレータ出力 $y_s(0)$ をプラントの観測出力 $y_p(0)$, すなわち t_0 時点において観測された出力データと一致させる。
- ④ 時間 t を同定開始時点 t_0 にセットする。プログラム上では, $t_0=0$ とする。
- ⑤ 離散型の入出力データ (観測点数は4点) を時間軸上の連続関数に変換する。ここでは, 全ての観測点を通るような時間多項式を求め, それらを入出力関数 [$k+1$ 個] として与えている。
- ⑥ 常微分方程式の数値計算法は, 4次の Runge-Kutta 法による。
- ⑦ 微分方程式の解を用いて, パラメータ微小変化時 ($\delta\theta$) のシミュレータの過渡応答 $\delta y_s(t)$ を $\hat{\theta}_0$ の近傍で線形近似する⁵⁾。
- ⑧ 積分の数値計算(台形則)。シミュレータの過渡応答の微分方程式の導出。
- ⑨ 同定期間のチェック。期間 T の間, ⑤~⑧を繰り返す。
- ⑩ パラメータの修正量を求める。
- ⑪ 修正されたパラメータの値を計算する。
- ⑫ 修正率が0.1%より小さくなれば, 同定終了とする。そうでなければ, 同定の精度が高くなるまで新たな修正値を所与として③~⑪のプロセスを繰り返す。
- ⑬ 求められたパラメータをプリントアウトする。

なお, この同定プログラムが正しく働いているかどうかをチェックするためには, 任意のモデルに対して, まずパラメータの真値として適当な値

を既知として設定しておき，ホワイトノイズがランダムに発生するような正弦波関数を入出力関数として与える。そして，真値とは異なる数値をシミュレータのパラメータとしてインプットし，最終的に真値と同じ値が同定されるか否かによって確かめられる。

SANQシステム同定法は，従来の同定法とは違って，同定の対象に対して連続時間のもとで非線形かつパラメータが時変であるような微分方程式系で表されるようなシミュレータを作成しておき，そのパラメータだけでなく積分器の出力の値をも同定することができるのである。この同定法は，工学的観点からこれまでの同定法と比較して以下のような優れた特徴を備えていると考えられる。

- (1) Neat Identification：すなわち，プラントの操業状態を変更することなく同定することができる。従来の同定法では，同定用の外生入力信号を同定対象に注入し同定可能な条件 (PE 条件) を満たすようにするため，同定対象の操業状態を乱すことになる。したがって，経済モデルのように実験することができないような場合にパラメータを推定することができるということは，理論モデルの検証方法としては大変有用な同定法であるといえよう。
- (2) 同定対象の積分器出力の同定も可能である。したがって，モデルの状態変数の中の幾つかの変数の値あるいはその変化量が外部から観測し得ない，すなわちデータとして取得できない場合であっても，それらを未知パラメータと同時に同定することができるのである。このことは，モデルを構成する微分方程式系が複雑になればなるほど効力を発揮することになる。
- (3) 非線形時変系の同定が可能である。本稿では次節において説明するように線形の時不変系を同定対象として考察するが，既に述べたように経済モデルの多くは非線形であるので，この点も他の同定法と比べて有利であ

る。

(4) Quick Identification : 同定対象の特性の変化を速やかに同定することができる。16ビットのパーソナルコンピュータを用いて BASIC で書かれたプログラムで十分対応でき、平均5回程度の繰り返し演算で所定の同定精度を達成することができる為、極めて短時間の内に同定作業が終了する。

(5) 大規模なモデルを対象としたパラメータ同定が可能であること。本稿では検討することができなかつたが、微分方程式系からなる大規模なマクロ経済モデル全体の未知パラメータを同時に同定することも理論的には可能である。しかしながら、各入出力データのオーダーが異なるときには、パソコンレベルで演算させる場合には計算エラーが出ることもあり改善の余地が残されている点でもある。

3. 経済モデルへの適用

本節では、連続時間の下で微分方程式によって表される中・短期のマクロ経済モデルについて、観測データ数が極めて少ない場合でも十分に推定可能な手法である工学的な S A N Qシステム同定法を用いることによって、モデルの未知パラメータを推定することを試みた。たとえば、短期の為替レート決定の理論モデルとしてアセットアプローチに注目し、金利裁定式に基づく名目為替レートの運動方程式を考える。このとき、わが国と米国の利子率をそれぞれ入力とし、名目為替レート（円／ドル）を出力とみなし、内外金利差に対する反応係数と外国の金融資産を所有するときの一種のリスクパラメータとを想定し、これらの未知パラメータを S A N Qシステム同定法によって推定するのである。

〔1〕

自国の投資家による外国為替投資を考えたとき、為替に関するリスクニュートラルであれば自国債券と外国債券とが完全代替となり、資金を円建てで運用しようとドル建てで運用しようと双方の予想収益率は等しくなる。したがって、資本の移動に対して何ら障壁が無ければ、次式のような先物カバー付き金利裁定 (covered interest arbitrage) が成立することになる。

$$1+i=(1+i_F)\left(1+\frac{E(e)-e}{e}\right)$$

ただし、

 i : 日本の名目利子率、 i_F : 米国の名目利子率 e : 名目為替レート (直物; 円/ドル) $E(e)$: 予想為替レート (先物レート)したがって、 $E(e)-e$ は、直先スプレッドである。

上式の両辺について対数をとって近似すると、

$$i=i_F+\frac{E(e)-e}{e}$$

近似的な利子裁定式が得られることになる。

計量経済学的手法によってこの金利裁定式を計測しようとするときには、為替レートの予想値 $E(e)$ をデータ上取得することができないから、為替先物相場における3ヶ月直先スプレッドを代理変数として用いて、

$$\frac{E(e)-e}{e}=\alpha+\beta(i-i_F)$$

を推定することになるのである。もし金利裁定が成立しているならば、 β の値はほぼ1に等しくなるであろう。

他方、同じく為替リスクが存在せず自国債券と外国債券とが完全代替的

であり資本の移動に対して何ら障壁が無いとした場合に、連続時間の下で成立する金利裁定式は以下のようなになる。すなわち、

$$\exp(it) = \exp(i_F t) \frac{E(e_t)}{e_0}$$

ただし、 e_0 は初期点における為替レートであり、 $E(e_t)$ は t 時点における予想為替レートである。いま、為替レート予想に関して完全予見が成立するとすれば $E(e_t) = e_t$ となるから、完全予見の下で上式の両辺の対数をとって時間 t について微分すれば、連続時間の下での金利裁定式が得られる。すなわち、

$$i = i_F + \frac{\dot{e}}{e},$$

しかしながら、資本移動がそれほど完全ではなくて内外金利差に対してある反応係数 θ_1 で為替レートが変動し、しかも資産選択に関するリスクパラメータ θ_2 が存在するとき、対象となるモデルは以下のように表される。

$$\frac{\dot{e}}{e} = \theta_1(i - i_F) + \theta_2,$$

θ_1 : 内外名目金利差に関する反応係数

θ_2 : リスクパラメータ

上式の未知パラメータ (θ_1, θ_2) の値を S A N Q 同定法により推定する。

ただし、入出力データは四半期毎の離散型であるから連続型に変換しなければならない。理論モデルが中・短期モデルであるから、四半期データを 4 時点 (1 年間) で取り出し、全ての観測点 (4 点) を通る近似的な時間多項式を用いて連続な入出力関数として与えた⁶⁾。

観測期間：1982年 I ~ IV

推定値 : $\theta_1 = 4.91, \theta_2 = 0.557$

〔3〕

次に、中・短期的な為替レートの決定関係を検証するために、アブソープション・アプローチにしたがって貿易収支を改善するように交易条件が調整されると想定し、さらに短期的には実質金利の裁定条件を考慮したモデルを作成した。

$$\frac{\dot{e}}{e} = \left(\frac{\dot{p}}{p} - \frac{\dot{p}_F}{p_F} \right) + \theta_3 \left\{ \left(i - \frac{\dot{p}}{p} \right) - \left(i_F - \frac{\dot{p}_F}{p_F} \right) \right\} + \theta_4 \left(\frac{\dot{B}}{B} \right)$$

ただし、

p : 日本のGNPデフレーター、

p_F : 米国のGNPデフレーター

i : 利子率（国債利回り：10年）、

i_F : 米国の利子率（公債利回り：30年）

e : 直物為替レート（円／ドル）、

B : 対外純資産残高（ドル評価）

θ_3 : 実質金利差に関する反応係数、

θ_4 : リスクパラメータ

データ数：4点（四半期データ）

入出力関数として全ての観測点（4点）を通るような時間多項式を用いて、未知パラメータ（ θ_3 , θ_4 ）の値をSANQ同定法により推定した。

観測期間：1982年 I～IV

推定値 : $\theta_3=1.569$, $\theta_4=0.152$

観測期間：1985年 I～IV

推定値 : $\theta_3=13.584$, $\theta_4=0.063$

4. 問題点および今後の課題

SANQシステム同定法を用いて微分方程式系で表されるマクロ経済モデルのパラメータを推定すれば、定常状態での推定あるいは離散時間での差分形モデルに変換してのパラメータ推定ではなくて、ダイナミクスの中でパラメータを同定することが可能である。しかも、同定に必要な入出力データの観測期間が極めて短い場合であってもパラメータの推定が可能であり、状態変数それ自身の変化分をも同定できるのである。このことは、マクロ動学モデルの実証分析という観点からは、非常に興味深くまた有用性の高い手法として確立される可能性が十分であると思われる。ただし、解決すべきいくつかの技術的な問題点が残されていることもまた事実である。

まず第一に、離散型の入出力データを時間軸上の連続関数に近似する際の平滑化が、この手法を経済モデルに適用する上で必ず解決しなければならない課題である。現実の経済現象あるいは経済活動のほとんどが連続であるにもかかわらず、取得可能な経済データの多くは離散型の月次、四半期あるいは年次毎のデータである。すなわち、ある連続量がフィルターによって期中平均値のような離散型データに加工されているのである。しかしながら、同定をおこなうためにはこれらの離散型のデータをもう一度連続な時間関数に変換して入出力関数としてプラントおよびシミュレータに与えなければならない。今回は、全ての観測点を通るような時間多項式を入出力関数として用いたために実際のデータからの乖離が大きく、しばしば同定不能に陥ったり異なる同定期間においてばらつきの大きいパラメータを算出したりという不都合が生じた。

また、状態変数の微分係数は出力関数の各時点における接線の傾きであるから、為替レートの予想も出力関数である直物レート (e) の各時点における $e(t)$ の接線の傾きで捉えられている。したがって、直物レートの瞬間的な変化の向きが完全予見の下での先物に関する予想形成を表すことになるから、現実の先物予想とは異なったデータを用いて同定をおこなっていることになる。たとえば、四半期データを基にして近似された利子率および為替レートの入出力関数が、日々のデータあるいは月次データに照らし合わせてみて大きく乖離しているような点があれば同定されたパラメータが真の値であるとはいえなくなるのである。

しかしながら平滑化をおこなうことによって、そのデータの特徴を示すような特徴的な周波数成分が失われることにも注意しなければならない。今後の課題として、データを補間する手法を確立しなければならぬ。

第二の問題点としては、入出力データのオーダーが揃っていなければならないことである。つまり、入出力データのほとんどが変化率であるとき、金額表示の入力があると演算をおこなうときにオーバーフローを発生させてしまうからである。

問題の第三は、パラメータの真の値あるいは真の値の近似値に対する情報を予め知っておかなければならないことである。モデルの構造パラメータの理論値を絞り込んでおかなければ、同定のための時間がそれだけ長くかかることになる。しかしながら、社会現象あるいは人間行動を描写する経済モデルは、石油 1cc を燃焼させるとどのくらいの熱量が得られるかが既知であるような自然科学系の理論モデルとは異なって、パラメータの真値の見当をつけることはしばしば困難である。

本稿では検討していないが、予測精度の向上を図るためにも検証方法を確立することが必要である。経済モデルの理論式は、いずれにしろデリケ

ートなものであるから、未知パラメータ θ の値も恒常的に時不変であるとは考えにくい。したがって、パラメータの推定値がある期間を通して一定の値の周りに分布しているようならば、むしろ安定的であると考えて差し支えないのではないだろうか。

附記：

＊）本稿は、平成4年度理論・計量経済学会（1992年10月、九州大学）において共同研究報告をおこなったときの原稿を基にして、加筆、修正したものである。本稿の作成に際しては、研究会のメンバーである、九州大学経済学部細江守紀教授、内田主幹氏（九州電力株；日本ベレー）、豊田幸裕氏（九州電機製造株）より懇切なる御指導を賜わるとともに、このような単著の形での掲載をお許しいただいた。ここに記して、謝意を表したい。もちろん本稿中にあり得べき誤謬は、すべて筆者の責任である。

また本稿は、本学特定研究図書予算による研究助成〔設備図書整備(Journal of Econometrics)〕に対する成果報告の一部でもある。

注

- 1) この手法は、九州大学工学部、九州電力、九州電機製造を中心とした三九会による産学協同研究の一環として、大規模なプラントの故障診断法として開発されたシステム同定法であり、福岡工業大学、九州工業大学および日本ベレーも参加し研究を継続している。
- 2) 拙稿 [1] および [2] を参照されたい。
- 3) 新開 [5] はゲーム論的政策協調に対して、採用されたモデルに対する信頼性あるいは当事国によるモデルの意図的な粉飾等の面から疑義を投げかけている。
- 4) SANQシステム同定法の経済モデルへの適用プログラムを作成するにあたっては、九州電機製造(株)技術開発部の豊田幸裕課長からとくに懇切なる御教示を賜った。
- 5) 評価関数 $J(t_0)$ は、

$$J(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} \{y_p(t) - y_s(t)\}^2 dt \text{ である}$$

シミュレータ出力 $y_s(t)$ について $\hat{\theta} = \theta_0$ の近傍でテーラー展開し 1 次近似すると

$$y_s(t) \doteq y_s(t) \Big|_{\hat{\theta} = \theta_0} + \frac{\partial y_s(t)}{\partial \theta} \Big|_{\hat{\theta} = \theta_0} \cdot \delta\theta$$

$$\frac{\partial J(t_0)}{\partial \theta} = -2 \int \frac{\partial y_s}{\partial \theta} \{y_p(t) - y_s(t) - \frac{\partial y_s}{\partial \theta} \delta\theta\} dt = 0$$

よって、

$$\delta\theta = \left[\int \left(\frac{\partial y_s}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial y_s}{\partial \theta} \right)^T dt \right]^{-1} \int \left(\frac{\partial y_s}{\partial \theta} \right) (y_p(t) - y_s(t)) dt$$

6) 観測点数 (データ数) が 4 点のときは, 時間多項式を

$$U_i(t) = \sum_{i=0}^3 a_i t^i \text{ とおき, 全点を通るような } a_i \text{ を求める。}$$

参考文献

- [1] 秋山 優 「変動相場制下の財政・金融政策～資産選択アプローチ～」 『経済論究』九州大学大学院経済学会, 第76号, 1990年
 - [2] 秋山 優 「為替レート, 賃金および物価の動学分析」 『彦根論叢』滋賀大学経済学会, 第273・274号 1991年
 - [3] 深尾光洋 『為替レートと金融市場』東洋経済新報社 1983年
 - [4] 村田安雄・里麻克彦 『金融・為替と価格・投資』多賀出版 1992年
 - [5] 新開陽一 『通論国際経済』岩波書店
 - [6] 内田主幹 「SANQシステム同定法およびU-MRACSとその周辺」
 - [7] 内田主幹・秋山優・細江守紀 「SANQシステム同定法によるマクロ経済モデルのパラメータ同定～」 理論・計量経済学会1992年度大会報告要旨
 - [8] 内田主幹・廣崎豊伸・豊田幸裕・中村秀雄 「制御理論による動的経済政策の決定法」 『九州電力研究報告』No88013 1989年
- Journal of Econometrics* : 学内特定研究図書予算による設備図書整備
- [9] Havenner, A., and B. Modjtahedi "Foreign exchange Rates: A Multiple Currency and Maturity Analysis" *Journal of Econometrics* 37, pp. 251-264, 1988
 - [10] Kiviet, Jan F. "Model Selection Test Procedures in a Single Linear Equation of a Dynamic Simultaneous System and their Defects in Small Samples" *Journal of Econometrics* 28, pp. 327-362, 1985
 - [11] Melvin.J.H., and D.M. Patterson "Identification of the Coefficients in a Non-linear Time Series of the Quadratic Type" *Journal of Econometrics* 30, pp. 269-288, 1985
 - [12] Nowak, Eugen "Identification of Simultaneous Equation Models with

- Measurement Errors based on Time Series Structure” *Journal of Econometrics* 40, pp. 319-325, 1989
- [13] Startz, Richard “Testing Rational Expectations by the Use of Overidentifying Restrictions” *Journal of Econometrics* 23, pp. 343-351, 1983
- [14] Turkington D.A., and R.J. Bowden “Identification Information and Instruments in Linear Econometric Models with Rational Expectations” *Journal of Econometrics* 38, pp. 361-373, 1988